



بررسی رفتار استاتیکی پیچشی نانومیله‌های محصور در محیط الاستیک با در نظر گرفتن اثر انرژی سطح

رضا ناظم‌نژاد*، میلاد آریان‌پور

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه دامغان، دامغان، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۲۵ آذر ۱۳۹۵
بازنگری: ۵ اسفند ۱۳۹۵
پذیرش: ۱۷ اردیبهشت ۱۳۹۶
ارائه آنلاین: ۲۷ اردیبهشت ۱۳۹۶

کلمات کلیدی:

نانومیله
رفتار استاتیکی پیچشی
محیط الاستیک
انرژی سطح

چکیده: در این مقاله رفتار استاتیکی پیچشی نانومیله‌های محصور در محیط الاستیک با در نظر گرفتن اثر انرژی سطح (انرژی ناشی از مدول برشی سطحی و تنش سطحی) و تحت بارگذاری پیچشی خارجی بررسی شده است. بدین منظور، مؤلفه‌های تنش ناشی از انرژی سطح، با استفاده از نظریه الاستیسیته سطحی به‌دست آمده و سه نوع بارگذاری پیچشی خارجی، بارگذاری با دامنه یکنواخت، با دامنه خطی و با دامنه سینوسی، در نظر گرفته شده است. سپس، با استفاده از اصل همپلتون، معادله حاکم بر حرکت نانومیله استخراج شده است. معادلات حاکم در هر نوع بارگذاری نیز به ازای شرایط مرزی گیردار-گیردار و آزاد-آزاد به صورت تحلیلی حل شده است. اثر انرژی سطح و محیط الاستیک بر روی رفتار استاتیکی پیچشی نانومیله (جابه‌جایی‌های پیچشی) به ازای در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای شعاع و طول نانومیله، و گشتاور خارجی بررسی شده است. به منظور جامعیت بخشیدن به نتایج، تأثیر مقدار و علامت مؤلفه‌های انرژی سطح نیز بر روی رفتار استاتیکی پیچشی نانومیله‌ها بررسی شده است. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که تأثیر انرژی سطح می‌تواند وابسته به عوامل هندسی و مقادیر و نوع علامت مؤلفه‌های آن باشد. نتایج این پژوهش می‌تواند در طراحی سامانه‌های نانوالکترومکانیکی مانند نانویاتاقان‌ها و سروو موتورهای دوار مفید باشد.

۱- مقدمه

مقایسه نتایج نظریه کلاسیک با نتایج آزمایشگاهی سازه‌های نانومقیاس نشان داده است که رفتار این سازه‌ها قابل تفسیر با استفاده از نظریه‌های کلاسیک نمی‌باشد که مهم‌ترین دلایل این اختلاف ناشی از وجود اثر اندازه و اثر انرژی سطحی می‌باشد. به منظور بررسی اثر اندازه، نظریه‌های مختلفی پیشنهاد شده است که یکی از پرکاربردترین آنها نظریه الاستیسیته غیرمحلی [۱] می‌باشد. این نظریه بیان می‌کند که تنش در یک نقطه از نانوسازه، نه تنها به کرنش در آن نقطه بلکه به کرنش در تمام نقاط جسم بستگی دارد. برای بررسی اثر انرژی سطحی نیز، نظریه الاستیسیته سطحی [۲] پیشنهاد شده است که در آن سطح جسم به عنوان پوسته‌ای دوبعدی مدل می‌شود که به اطراف جسم به گونه‌ای چسبیده است که قابلیت لغزش بین سطح و حجم جسم وجود ندارد. دلیل در نظر گرفتن اثر انرژی سطح این است که در سازه‌های نانومقیاس، نسبت انرژی ذخیره شده در سطح به انرژی ذخیره شده در حجم قابل توجه می‌شود؛ به طوری که نمی‌توان از آن مشابه آنچه برای سازه‌های ماکرو انجام می‌شود صرف نظر نمود.

مسلماً این امر بدیهی است که استفاده از یک قطعه یا شیء در یک سامانه، نیازمند شناخت صحیح رفتارها و ویژگی‌های مختلف مکانیکی، الکتریکی و فیزیکی آن می‌باشد. یکی از رفتارهای مکانیکی که می‌تواند

در طراحی سامانه‌های نانوالکترومکانیکی مهم باشد بررسی رفتار پیچشی نانومیله‌ها می‌باشد. رفتار پیچشی نانومیله‌ها می‌تواند از دو جنبه استاتیکی و دینامیکی مورد توجه قرار گیرد. از اولین پژوهش‌هایی که به بررسی اثر اندازه بر رفتار پیچشی نانومیله‌ها و نانوتیوب‌ها پرداخته است می‌توان به پژوهش لی و همکاران [۳] اشاره نمود. در این پژوهش، رفتار پیچشی استاتیکی و دینامیکی نانومیله‌ها براساس مدل جدیدی از نظریه الاستیسیته غیرمحلی بررسی شده است. آنها نشان دادند که با افزایش اثر اندازه، جابه‌جایی زاویه‌ای کاهش یافته اما بسامدهای طبیعی افزایش می‌یابد. در پژوهش دیگری لیم و همکاران [۴] ارتعاشات آزاد پیچشی نانومیله‌های با حرکت محوری را با در نظر گرفتن اثر اندازه بررسی نمودند. در پژوهش فوق، سرعت بحرانی استخراج شده و نتیجه‌گیری شده است که سرعت بحرانی به شدت متأثر از مقدار اثر اندازه می‌باشد. پژوهشی مشابه نیز برای نانولوله‌های دو لایه انجام گرفته است [۵]. در این پژوهش، اثر پیوندهای واندروالسی به همراه اثر اندازه بر روی رفتار ارتعاشات پیچشی نانولوله‌ها بررسی شده و نشان داده شده است که شکل مودهای نانولوله دو لایه تحت پیچش، شامل شکل مودهای هم‌فاز و ناهم‌فاز می‌باشد. لویا و همکاران [۶] نیز علاوه بر در نظر گرفتن اثر اندازه، رفتار پیچشی نانومیله‌های ترک‌دار را با در نظر گرفتن اثرات شدت ترک، محل ترک، شرایط مرزی مختلف و اثر جرم متمرکز مورد تحلیل قرار دادند. در پژوهش دیگری، لیم و همکاران [۷] رفتار استاتیکی و دینامیکی پیچشی

۲- استخراج معادله حاکم با در نظر گرفتن اثر انرژی سطح

به منظور استخراج معادله حاکم بر رفتار استاتیکی پیچشی نانومیله تحت پیچش با در نظر گرفتن اثر انرژی سطح، نانومیله‌ای به طول L ($0 \leq x \leq L$) و شعاع R در دستگاه مختصات $x-y-z$ مدنظر می‌باشد (شکل ۱). مؤلفه‌های جابه‌جایی نانومیله تحت پیچش در راستای سه محور دستگاه

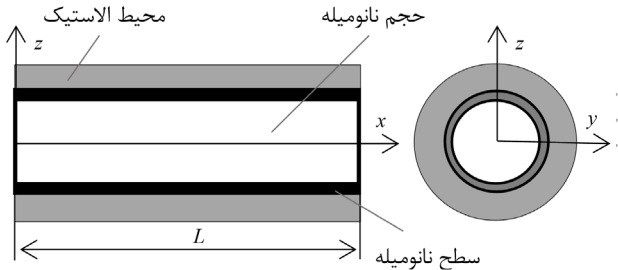


Fig.1. Schematic of nanorod embedded in elastic medium with showing the nanorod surface

شکل ۱: شماتیک نانومیله محصور در محیط الاستیک با نمایش سطح نانومیله

مختصات به صورت روابط (۱) تا (۳) بیان می‌شوند [۱۴]:

$$u(x, t) = 0 \quad (1)$$

$$v(x, t) = -z \theta(x, t) \quad (2)$$

$$w(x, t) = y \theta(x, t) \quad (3)$$

که در روابط (۱) تا (۳)، t زمان s ، $u(x, t)$ مؤلفه جابه‌جایی در راستای محور x ، $v(x, t)$ مؤلفه جابه‌جایی در راستای y و $w(x, t)$ مؤلفه جابه‌جایی در راستای z می‌باشد.

براساس مؤلفه‌های جابه‌جایی داده شده، مؤلفه‌های کرنش و تنش به ترتیب به صورت روابط (۴) تا (۹) به‌دست می‌آیند:

- مؤلفه‌های کرنش:

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -z \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (4)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = y \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (5)$$

$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 0 \quad (6)$$

• مؤلفه‌های تنش:

$$\sigma_{xy} = -Gz \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (7)$$

$$\sigma_{xz} = Gy \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (8)$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0 \quad (9)$$

در روابط (۷) و (۸)، G مدول برشی حجمی، Pa می‌باشد. مؤلفه‌های تنش غیرصفر (رابطه‌های (۷) و (۸)) در دستگاه مختصات $x-y-z$ در واقع مؤلفه‌های تنشی هستند که مماس بر محیط نانومیله و عمود بر محور x می‌باشند و در راستای محورهای مختصات x و y تجزیه شده‌اند (شکل ۲).

نانوسازه‌ها را براساس نظریه الاستیسیته غیرمحلّی مورد بررسی قرار دارند. به منظور بررسی رفتار فوق، از روش اجزا محدود استفاده شده است و فرض شده است که نانوسازه تحت گشتاور پیچشی متمرکز در انتهای آن و گشتاور گسترده در طول نانوسازه قرار دارد. نتیجه برجسته‌ای که این پژوهش به آن اشاره داشته است این است که مقایسه نتایج حل اجزا محدود و حل تحلیلی نشان می‌دهد که حل تحلیلی نمی‌تواند تأثیر اثر اندازه را در شرایط مرزی مختلف نشان دهد این در حالیست که این قابلیت در روش حل اجزا محدود امکان‌پذیر است. رفتار استاتیکی و دینامیکی پیچشی نانومیله‌های محصور در محیط الاستیک نیز براساس نظریه الاستیسیته غیرمحلّی توسط آردا و آیدوقلو [۸] مورد توجه قرار گرفته است. ناپایداری پیچشی نانو اچ‌جوانیتورها با استفاده از نظریه گرادیان کرنش در مرجع [۹] مورد بررسی قرار گرفته است. در این پژوهش، اثر نیروهای الکترواستاتیک و کازیمیر در معادله حرکت لحاظ شده است و ولتاژ پولین و زاویه پولین تعیین شده است. در این پژوهش نشان داده شده است که اثر اندازه سبب افزایش ولتاژ ناپایداری سامانه می‌شود. در پژوهش‌های دیگری که رفتار پیچشی نانولوله‌ها با استفاده از نظریه گرادیان کرنش [۱۰] و نظریه الاستیسیته غیرمحلّی [۱۱] مورد بررسی قرار گرفته است به کمک شبیه‌سازی دینامیک مولکولی، مقدار پارامتر اثر اندازه را برای نانولوله‌ها گزارش نمودند. قشلاقی و همکاران [۱۲] نیز تأثیر اثر اندازه بر روی ارتعاشات آزاد پیچشی نانولوله‌ها را با استفاده از نظریه اصلاح شده تنش کوپل شده بررسی نمودند. بررسی انتشار موج و ارتعاشات آزاد پیچشی نانوسازه‌های با مقطع دایروی براساس نظریه الاستیسیته غیرمحلّی نیز در مرجع [۱۳] بررسی شده است و نه تنها اهمیت تأثیر در نظر گرفتن اثر اندازه بر روی رفتار نانوسازه‌ها نشان داده شده است بلکه مزیت استفاده از مدل انتگرالی نظریه الاستیسیته غیرمحلّی نسبت به مدل دیفرانسیلی آن برجسته شده است.

مروری بر مراجع نشان می‌دهد که از بین دو عاملی که سبب بروز خطا بین نتایج نظریه کلاسیک و نتایج آزمایشگاهی برای نانومقیاس‌ها شده است تنها عامل اثر اندازه بر روی رفتار پیچشی نانوسازه‌ها بررسی شده و طبق دانسته‌های نویسندگان، عامل انرژی سطح در هیچ مرجعی بررسی نشده است. به همین دلیل و برای پوشش این خلاء، در این پژوهش رفتار استاتیکی پیچشی نانومیله‌ها با در نظر گرفتن اثر انرژی سطح بررسی می‌شود. به منظور جامع‌تر شدن بحث، فرض شده است نانومیله‌ها در محیط الاستیک محصور شده باشند. بدین منظور، معادلات حاکم بر رفتار استاتیکی پیچشی یک نانومیله با استفاده از اصل همپلتون استخراج شده و اثر انرژی سطح در معادلات حرکت و شرایط مرزی لحاظ می‌شوند. سپس معادلات حرکت به روش تحلیلی حل شده و به ازای شرایط مرزی مختلف، اثر انرژی سطح بر روی رفتار استاتیکی پیچشی نانومیله به ازای در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای شعاع نانومیله، طول نانومیله و گشتاور خارجی بررسی شده است.

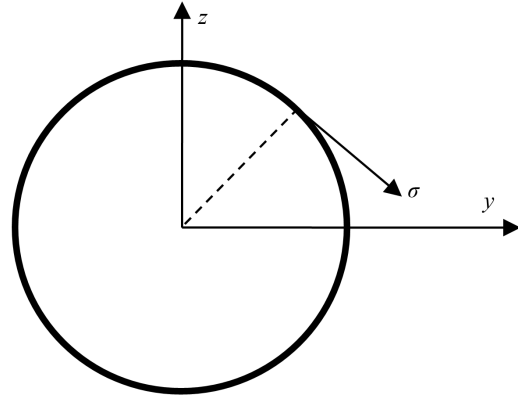


Fig.2. Displaying the stress component in nanorod

شکل ۲: نمایش مؤلفه تنش در نانومیله

$$\delta U = \frac{1}{2} \int (\tau_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + \tau_z \delta \varepsilon_{xz}) dx dy \quad (15)$$

$$\delta W = \int_0^L T_e \delta \theta dx \quad (16)$$

$$\delta K = 0 \quad (17)$$

با جایگذاری روابط (۱۵) تا (۱۷) در رابطه (۱۴) و انجام انتگرال گیری جزء به جزء، معادله حاکم نانومیله محصور در محیط الاستیک با در نظر گرفتن اثر انرژی سطح و همچنین معادله‌های شرایط مرزی به ترتیب به صورت روابط (۱۸) و (۱۹) حاصل می‌شوند:

$$(GI_p + C) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - k_t \theta = T_e \quad (18)$$

$$(GI_p + C) \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_0^L = 0 \quad (19)$$

که پارامترهای C و IP به صورت زیر می‌باشند:

$$C = 2\pi R^3 (\mu_0 - \tau_0) \quad (20)$$

$$I_p = \iiint (y^2 + z^2) dA = \frac{\pi R^4}{2} \quad (21)$$

در روابط (۱۸) تا (۲۱)، K_t ضریب سختی محیط الاستیک به ازای واحد طول، T_e گشتاور خارجی، nI و IP ممان اینرسی قطبی سطح مقطع، m^4 می‌باشد. همانطور که از رابطه (۱۸) مشاهده می‌شود، مؤلفه‌های انرژی سطح در معادله حرکت ظاهر شده‌اند. نکته قابل ذکر دیگری که از معادله (۲۰) قابل ذکر است این است که از بین ثوابت لامه سطحی (μ_0 و λ_0) فقط ثابت لامه سطحی μ_0 در معادله حرکت ظاهر شده است که این امر به دلیل ماهیت رفتار مکانیکی (رفتار پیچشی نانومیله) مورد بررسی می‌باشد. همان‌طور که از مباحث مکانیک محیط پیوسته می‌دانیم ثابت لامه μ همان مدول برشی می‌باشد؛ بنابراین می‌توان ثابت لامه سطحی μ_0 را مدول برشی سطحی ($G_0 = \mu_0$) نامید.

پیش از حل معادله حاکم، ابتدا آن را بی‌بعد می‌نماییم. فرم بی‌بعد رابطه (۱۸) با توجه به تعریف $\bar{x} = x/L$ به صورت رابطه (۲۲) حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{x}^2} - \alpha^2 \theta = \beta^2 T_e \quad (22)$$

که پارامترهای α^2 و β^2 عبارتند از:

$$\alpha^2 = \frac{K_t L^2}{(GI_p + C)} \quad (23)$$

$$\beta^2 = \frac{L^2}{GI_p + C} \quad (24)$$

۳- حل معادله حاکم به ازای شرایط مرزی مختلف

بعد از استخراج معادله حاکم (رابطه (۲۲)) و شرایط مرزی (رابطه (۱۹))، معادله حاکم به ازای سه بارگذاری خارجی پیچشی متفاوت که تغییرات آن‌ها

تا این قسمت، تنها مؤلفه‌های حجم جسم که در اصل همیلتون باید در کار روند استخراج شده است. در ادامه، مؤلفه‌های ناشی از سطح که در اصل همیلتون و تشکیل انرژی پتانسیل مؤثر می‌باشند، به دست خواهد آمد.

در نظریه الاستیسیته سطحی گارتین و موراواک [۱] رابطه تنش و کرنش سطحی به صورت روابط (۱۰) و (۱۱) ارائه شده است:

$$\tau_{ab}^{\pm} = \tau_0^{\pm} \delta_{ab} + (\mu_0^{\pm} - \tau_0^{\pm})(u_{a,b}^{\pm} + u_{b,a}^{\pm}) + (\lambda_0^{\pm} - \tau_0^{\pm})u_{g,g}^{\pm} + \tau_0^{\pm} u_{a,b}^{\pm} \quad (10)$$

$$\tau_{\alpha z}^{\pm} = \tau_0^{\pm} u_{z,\alpha}^{\pm} \quad (11)$$

که τ_0^{\pm} تنش پسماند سطح در حالت کرنش صفر، $\alpha, \beta = x, y$ و μ_0^{\pm} ثوابت لامه سطوح فوقانی و زیرین (منظور از سطوح فوقانی و زیرین، برای جسم با مقاطع مربع یا مستطیل می‌باشد)، $\delta_{\alpha\beta}$ دلتای کرونگر، u_{α}^{\pm} مؤلفه‌های جابه‌جایی سطوح در راستای محورهای مختصات و علامت‌های مثبت و منفی به ترتیب نشان‌دهنده سطح فوقانی و زیرین تشکیل دهنده جسم می‌باشند. از آنجا که در پژوهش حاضر، نانومیله مورد بررسی همگن است و جنس تمام نقاط نانومیله یکسان است از علامت‌های مثبت و منفی صرف‌نظر می‌شود.

با در نظر گرفتن مؤلفه‌های جابه‌جایی نانومیله (روابط (۱) تا (۳))، مؤلفه‌های تنش سطحی غیرصفر مؤثر در ارتعاشات پیچشی نانومیله به صورت روابط (۱۲) و (۱۳) به دست می‌آیند:

$$\tau_{xz} = \tau_0 y \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (12)$$

$$\tau_{xy} = 2(\mu_0 - \tau_0) \left(z \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad (13)$$

اکنون که مؤلفه‌های تنش و کرنش حجم و سطح جسم به دست آمده‌اند می‌توان با استفاده از اصل همیلتون (رابطه (۱۴))، معادله شرایط مرزی و معادله حرکت حاکم بر نانومیله تحت پیچش را با در نظر گرفتن اثر انرژی سطح استخراج نمود. در اصل همیلتون داریم:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U - K - W) dt = 0 \quad (14)$$

که U انرژی پتانسیل، K انرژی جنبشی، J و W کار خارجی وارد بر نانومیله، J بوده و به صورت روابط (۱۵) تا (۱۷) بیان می‌شوند:

$$\bar{\theta} = \frac{GI_p}{GI_p + C} \left(\frac{\bar{x}^2}{2} - \bar{x} \right) \quad (30)$$

۳-۲- بارگذاری پیچشی خطی

بارگذاری پیچشی خطی به صورت $T_e = T_0 \bar{x}$ تعریف شده است. پس از حل معادله حاکم به ازای بارگذاری پیچشی خطی، جابه‌جایی زاویه‌ای بی‌بعد با در نظر گرفتن اثر انرژی سطح به ازای شرط مرزی گیردار-گیردار، با و بدون احتساب محیط الاستیک به ترتیب به صورت روابط (۳۱) و (۳۲) به دست می‌آیند:

$$\bar{\theta} = \frac{GI_p}{K_t L^2} \left(\frac{e^{-\bar{x}\alpha} (-e^\alpha + e^{\alpha+2\bar{x}\alpha} + e^{\bar{x}\alpha} \bar{x} - e^{2\alpha+\bar{x}\alpha} \bar{x})}{(-1+e^{2\alpha})} \right) \quad (31)$$

$$\bar{\theta} = \frac{GI_p}{(GI_p + C)} \left(\frac{\bar{x}^3 - 3\bar{x}}{6} \right) \quad (32)$$

و به ازای شرط مرزی گیردار-آزاد خواهیم داشت:

$$\bar{\theta} = \frac{GI_p e^{-\bar{x}\alpha} (-e^\alpha + e^{\alpha+2\bar{x}\alpha} - e^{\bar{x}\alpha} \bar{x} \alpha - e^{2\alpha+\bar{x}\alpha} \bar{x} \alpha)}{K_t L^2 \alpha (1+e^{2\alpha})} \quad (33)$$

$$\bar{\theta} = \frac{GI_p}{(GI_p + C)} \left(\frac{\bar{x}^3 - 3\bar{x}}{6} \right) \quad (34)$$

۳-۳- بارگذاری پیچشی سینوسی

بارگذاری پیچشی سینوسی به صورت $T_e = T_0 \sin(\pi \bar{x})$ تعریف شده است. با انجام فرآیندی مشابه دو نوع بارگذاری قبلی، پس از حل معادله حاکم به ازای بارگذاری پیچشی سینوسی، جابه‌جایی زاویه‌ای بی‌بعد با در نظر گرفتن اثر انرژی سطح به ازای شرط مرزی گیردار-گیردار، با و بدون احتساب محیط الاستیک به ترتیب به صورت روابط (۳۵) و (۳۶) به دست می‌آیند:

$$\bar{\theta} = \frac{-GI_p}{(GI_p + C)} \left(\frac{\sin(\pi \bar{x})}{\pi^2 + \alpha^2} \right) \quad (35)$$

$$\bar{\theta} = \frac{-GI_p}{(GI_p + C)} \left(\frac{\sin(\pi \bar{x})}{\pi^2} \right) \quad (36)$$

و به ازای شرط مرزی گیردار-آزاد خواهیم داشت:

$$\bar{\theta} = \frac{-GI_p e^{-\bar{x}\alpha} (-\pi e^\alpha + \pi e^{\alpha+2\bar{x}\alpha} + \sin(\pi \bar{x}) (\alpha e^{\bar{x}\alpha} + \alpha e^{2\alpha+\bar{x}\alpha}))}{\alpha (GI_p + C) (1+e^{2\alpha}) (\pi^2 + \alpha^2)} \quad (37)$$

$$\bar{\theta} = \frac{GI_p}{(GI_p + C)} \left(\frac{\sin(\pi \bar{x})}{\pi^2} - \frac{\bar{x}}{\pi} \right) \quad (38)$$

۴- نتایج و بحث

در این بخش، ابتدا صحت روابط و نتایج ارائه شده صحه‌گذاری شده است و سپس نتایج جدیدی ارائه شده است که تأثیر عوامل مختلفی مانند مقدار و نوع گشتاور خارجی، انرژی سطح و ابعاد نانومیله را بر روی رفتار استاتیکی پیچشی نانومیله در نظر گرفته است.

در راستای طول نانومیله به صورت یکنواخت^۱، خطی^۲ و سینوسی^۳ می‌باشد (شکل ۳) را به دست آورده و با حل معادله فوق در هر نوع بارگذاری، جابه‌جایی زاویه‌ای بی‌بعد با در نظر گرفتن اثر انرژی سطح به ازای دو شرط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد به دست می‌آید. به منظور ارضای شرایط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد، به ترتیب روابط (۲۵) و (۲۶) باید در نظر گرفته شوند:

$$\theta(0) = \theta(1) = 0 \quad (25)$$

$$\theta(0) = \frac{d\theta}{d\bar{x}}(1) = 0 \quad (26)$$

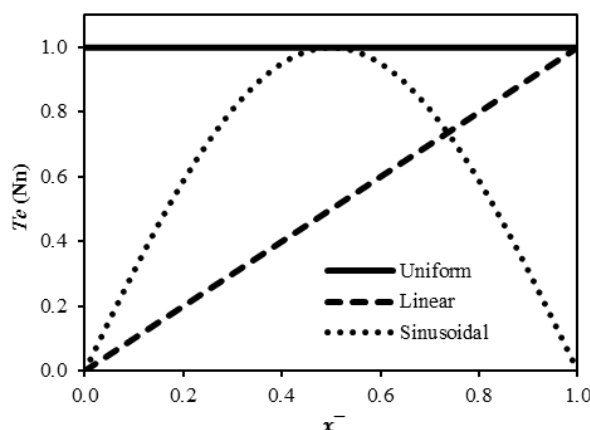


Fig. 3. Various considered models for external torque

شکل ۳: مدل‌های مختلف در نظر گرفته شده برای گشتاور خارج

۳-۱- بارگذاری پیچشی یکنواخت

بارگذاری پیچشی یکنواخت به صورت $T_e = T_0$ تعریف شده است که دامنه بارگذاری می‌باشد و در این پژوهش مقدار آن ۱ نانونیوتن در نظر گرفته شده است. پس از حل معادله حاکم به ازای بارگذاری پیچشی یکنواخت، جابه‌جایی زاویه‌ای بی‌بعد با در نظر گرفتن اثر انرژی سطح به ازای شرط گیردار-گیردار، با و بدون احتساب محیط الاستیک به صورت روابط (۲۷) و (۲۸) به دست می‌آیند:

$$\bar{\theta} = \frac{GI_p}{K_t L^2} \left(\frac{e^{-\bar{x}\alpha} (-1+e^{\bar{x}\alpha}) (-e^\alpha + e^{\bar{x}\alpha})}{(1+e^\alpha)} \right) \quad (27)$$

$$\bar{\theta} = \frac{GI_p}{(GI_p + C)} \left(\frac{\bar{x}^2}{2} - \frac{\bar{x}}{2} \right) \quad (28)$$

و به ازای شرط مرزی گیردار-آزاد خواهیم داشت:

$$\bar{\theta} = \frac{GI_p}{K_t L^2} \left(\frac{e^{-\bar{x}\alpha} (-1+e^{\bar{x}\alpha}) (-e^{2\alpha} + e^{\bar{x}\alpha})}{(1+e^{2\alpha})} \right) \quad (29)$$

- 1 Uniform torque load (UTL)
- 2 Linear torque load (LTL)
- 3 Sinusoidal torque load (STL)

۴-۱- صحنه‌گذاری نتایج

شد، فرض شده است که نانومیله بارگذاری‌های متفاوتی را متحمل شود؛ بنابراین برای این که بتوان این رفتار متفاوت را مدل نمود سه مدل متفاوت برای گشتاور خارجی در نظر گرفته شده است (۳- شکل ۳): مدل ثابت، مدل خطی و مدل سینوسی.

پیش از ارائه نتایج، لازم است ذکر شود که در تمامی بحث‌هایی که در ادامه آورده شده است هر کجا که اشاره‌ای به خواص مکانیکی نانومیله نشده است خواص مکانیکی براساس جدول ۲ در نظر گرفته شده است. خواص مکانیکی ذکر شده در جدول ۲ برای نانوالومینیوم با جهت کریستالی {۱۰۰} می‌باشد [۱۵].

ارائه نتایج شامل دو بخش کلی می‌باشد: (۱) بررسی عوامل هندسی که شامل طول و قطر نانومیله می‌باشد؛ (۲) بررسی عوامل مقدار خواص مکانیکی سطح که شامل مقدار مدول برشی سطحی و تنش سطحی می‌باشد. علاوه بر این، به منظور نمایش بهتر تأثیر انرژی سطح بر روی رفتار استاتیکی پیچشی نانومیله‌ها، پارامتر نسبت جابه‌جایی ۱ به صورت رابطه (۳۹) تعریف شده است:

$$DR = \frac{\text{جابه‌جایی زاویه‌ای نانومیله با در نظر گرفتن اثر انرژی سطح}}{\text{جابه‌جایی زاویه‌ای نانومیله بدون در نظر گرفتن اثر انرژی سطح}} \quad (39)$$

جدول ۲: خواص مکانیکی نانو آلومینیوم

Table 2. Mechanical properties of nano-aluminum

خاصیت مکانیکی	مدول برشی حجمی، GPa	ثابت لامه سطحی (مدول برشی سطحی) N/m	تنش سطحی N/m
مقدار	۲۶	-۵/۴۲۵۱	۰/۵۶۸۹

۴-۲-۱- بررسی اثر طول نانومیله

در ابتدا، اثر طول نانومیله بر روی جابه‌جایی‌های زاویه‌ای نانومیله بررسی شده است. بدین منظور در شکل ۴ و شکل ۵ تغییرات نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای بر حسب طول نانومیله رسم شده است.

نتیجه‌گیری از شکل‌های ۴ و ۵ شامل سه بخش می‌باشد. در بخش اول فقط تأثیر انرژی سطح بررسی می‌شود. شکل ۴ نشان می‌دهد که در حضور انرژی سطح، نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای نانومیله بیشتر می‌شود که بیان‌کننده این است که انرژی سطح، سبب نرم‌تر شدن نانومیله در رفتار استاتیکی پیچشی آن می‌شود. این در حالیست که گزارش شده است انرژی سطح سبب کاهش جابه‌جایی عرضی یا به بیان دیگر سبب سفت‌تر شدن نانومیله در رفتار استاتیکی عرضی آن می‌شود [۱۶]. همچنین شکل ۴ نشان می‌دهد که میزان تأثیرگذاری مؤلفه‌های انرژی سطح بر روی رفتار استاتیکی پیچشی نانومیله، مستقل از طول آن می‌باشد. اشاره به این نکته ضروری است که گزارش شده است در رفتار استاتیکی عرضی نانومیله‌ها، تأثیر انرژی سطح به طول نانومیله وابسته بوده و هر چه نانومیله بلندتر باشد، تأثیر انرژی سطح بیشتر می‌شود [۱۶]. علاوه بر این، از شکل ۴ مشاهده می‌شود که مؤلفه‌های انرژی

از آنجا که مرجعی یافت نمی‌شود که به بررسی تأثیر انرژی سطح بر روی رفتار پیچشی استاتیکی نانومیله‌ها پرداخته باشد که از طریق مقایسه نتایج مرجع فوق با نتایج پژوهش حاضر، صحت روابط و نتایج این پژوهش بررسی شود در این بخش، نتایج پژوهش حاضر با نتایج ارائه شده توسط مرجع [۸] که رفتار استاتیکی پیچشی نانولوله‌ها را با استفاده از نظریه الاستیسیته غیرمحملی بررسی نموده است، مقایسه شده است. بدین منظور، خواص مکانیکی نانولوله به صورت: مدول الاستیسیته ($1/0.95 TPa$)، مدول برشی ($0.4601 GPa$) و ضریب پواسون (0.19) در نظر گرفته شده است. قطر داخلی نانولوله، قطر خارجی نانولوله و طول آن نیز به ترتیب 0.5 و 2 و 5 نانومتر می‌باشد. در جدول ۱ جابه‌جایی‌های پیچشی بی‌بعد نانولوله تحت گشتاور خارجی ثابت ۱ نانونیوتن، به ازای مقادیر مختلف برای طول نانولوله و سختی محیط الاستیک و به ازای دو شرط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد آورده شده است. مقایسه نتایج ارائه شده در جدول ۱ نشان می‌دهد که روابط استخراج شده صحیح می‌باشد.

۴-۲-۲- ارائه نتایج جدید

در این بخش، نتایج جدید با محوریت بررسی تأثیر سه دسته متغیر به صورت بررسی تأثیر انرژی سطح، بررسی تأثیر پارامترهای هندسی نانومیله و بررسی تأثیر نوع و مقدار گشتاور خارجی ارائه می‌شود.

همانطور که در بخش استخراج معادله حرکت و شرایط مرزی اشاره شد از بین پارامترهایی که انرژی سطح را تشکیل می‌دهند (که شامل ثابت‌های لامه سطحی μ_0 و λ_0 ، تنش پسماند سطحی τ_0 ، و چگالی سطحی ρ_0 می‌باشد) فقط ثابت لامه μ_0 (که همان مدول برشی سطحی، G_0 ، می‌باشد) و تنش پسماند سطحی τ_0 ، در رفتار استاتیکی پیچشی نانومیله‌ها مؤثر می‌باشند. پارامترهای هندسی مورد بررسی نیز شامل طول و شعاع نانومیله می‌باشد و در مورد بررسی تأثیر نوع گشتاور خارجی، همانطور که پیشتر اشاره

جدول ۱: مقایسه جابه‌جایی‌های پیچشی بی‌بعد نانولوله به ازای مقادیر مختلف برای سختی محیط الاستیک و به ازای دو شرط مرزی مختلف

Table 1. Comparison of non-dimensional torsional displacement of nanotube for various values of elastic medium stiffness and two boundary condition types

سختی محیط الاستیک (نانونیوتن)	طول بی‌بعد	۰/۵		۱/۰	
		مرجع پژوهش حاضر [۸]	مرجع پژوهش حاضر [۸]	مرجع پژوهش حاضر [۸]	مرجع پژوهش حاضر [۸]
$K_t=0$	گیردار-گیردار	۰/۱۲۵	۰/۱۲۵	۰/۱۲۵	۰/۱۲۵
	گیردار-آزاد	۰/۳۷۵	۰/۳۷۵	۰/۳۷۵	۰/۴۹۸
$K_t=1$	گیردار-گیردار	۰/۱۲۴	۰/۱۲۴	۰/۱۲۴	۰/۱۲۴
	گیردار-آزاد	۰/۳۶۲	۰/۳۶۲	۰/۳۶۲	-
$K_t=10$	گیردار-گیردار	۰/۱۱۵	۰/۱۱۵	۰/۱۱۵	۰/۱۱۵
	گیردار-آزاد	۰/۲۸۶	۰/۲۸۶	۰/۲۸۶	۰/۳۷۵

نمی‌کند.

در بخش دوم نتایج حاصل از شکل ۴، تأثیرگذاری محیط الاستیک بر روی نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای نانومیله بررسی می‌شود. شکل ۴ نشان می‌دهد که اولاً، برخلاف مستقل بودن تأثیر انرژی سطح از طول نانومیله، میزان تأثیرگذاری محیط الاستیک، به طول نانومیله وابسته می‌باشد و هر چه طول نانومیله بزرگ‌تر باشد، میزان تأثیرگذاری محیط الاستیک نیز بیشتر می‌شود. ثانیاً، از شکل ۴ مشاهده می‌شود که محیط الاستیک سبب کاهش نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای نانومیله می‌شود که بیان‌کننده مقاومت محیط الاستیک در برابر جابه‌جایی زاویه‌ای نانومیله می‌باشد. این پدیده نیز برخلاف نوع تأثیرگذاری انرژی سطح می‌باشد. ثالثاً، شکل ۴ نشان می‌دهد که میزان تأثیرگذاری محیط الاستیک بر روی نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای نانومیله، وقتی طول آن کوچک باشد بسیار ناچیز است به نحوی که می‌توان از تأثیر محیط الاستیک در مقایسه با تأثیر انرژی سطح صرف‌نظر نمود. (قابل ذکر است که این نتیجه‌گیری می‌تواند به میزان سختی محیط الاستیک و مقادیر مؤلفه‌های انرژی سطح، بستگی داشته باشد که در قسمت‌های بعدی مقاله بررسی خواهند شد) و نکته پایانی این بخش این است که هر چه میزان سختی محیط الاستیک بیشتر باشد میزان تأثیرگذاری آن هم بیشتر می‌شود. در بخش سوم نتایج حاصل از شکل ۴ نیز، نحوه تأثیرگذاری انرژی سطح و محیط الاستیک وقتی به صورت همزمان در نظر گرفته شده باشند، بررسی می‌شود. شکل ۴ نشان می‌دهد که وقتی تأثیر انرژی سطح و محیط الاستیک همزمان در نظر گرفته می‌شوند در طول‌های کوچک نانومیله، تأثیر انرژی سطح غالب می‌باشد و با افزایش طول نانومیله، به تدریج تأثیر کاهشی محیط الاستیک افزایش می‌یابد تا این‌که به ازای طول‌های بزرگ نانومیله، اثر آن در مقایسه با تأثیر انرژی سطح غالب می‌شود. با توجه به تغییرات منحنی‌هایی که تأثیر هر دو عامل انرژی سطح و محیط الاستیک را در نظر گرفته‌اند این نتیجه حاصل می‌شود که محدوده تأثیرگذاری محیط الاستیک، به سختی آن بستگی دارد به این معنی که، هر چه مقدار سختی محیط الاستیک بیشتر باشد تأثیر غالب آن در مقایسه با تأثیر انرژی سطح، به ازای طول‌های کوتاه‌تر نانومیله اتفاق می‌افتد. نکته پایانی که از منحنی‌های فوق قابل ذکر است این است که منحنی، به ازای یک طول مشخص، محور افقی را قطع می‌نماید که نشان‌دهنده این است که به ازای یک طول مشخص، تأثیر کاهشی محیط الاستیک، تأثیر افزایشی انرژی سطح را خنثی می‌سازد.

در شکل ۵ نیز که تغییرات جابه‌جایی زاویه‌ای نانومیله برحسب طول آن به ازای شرط مرزی گیردار-آزاد نمایش داده شده است، نشان می‌دهد که کلیت رفتار منحنی‌های رسم شده در آن شبیه منحنی‌های رسم شده در شکل ۴ (تغییرات جابه‌جایی زاویه‌ای نانومیله برحسب طول آن به ازای شرط مرزی گیردار-گیردار) می‌باشد؛ بنابراین هر آنچه که از شکل ۴ نتیجه‌گیری شده است در مورد شکل ۵ نیز صادق می‌باشد. تنها تفاوت مشهود در شکل‌های ۴ و ۵ این است که تأثیر محیط الاستیک بر روی جابه‌جایی زاویه‌ای نانومیله با شرط مرزی گیردار-آزاد بیشتر از شرط مرزی گیردار-گیردار می‌باشد.

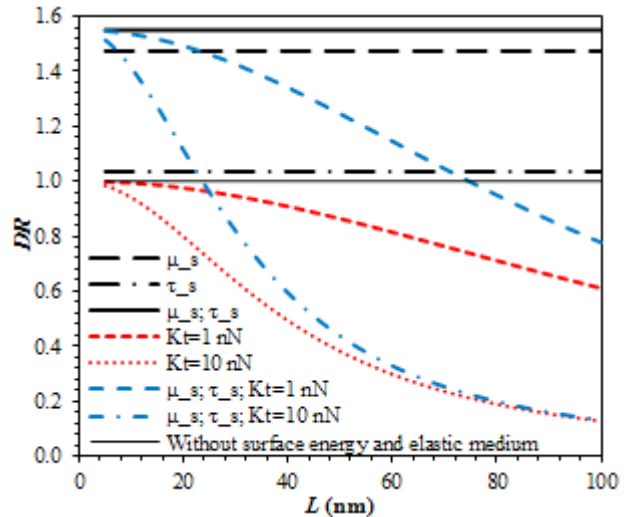


Fig.4. Variations of displacement ratio versus the length of nanorod for clamped-clamped boundary condition

شکل ۴: تغییرات نسبت جابه‌جایی بر حسب طول نانومیله به ازای شرط مرزی گیردار-گیردار

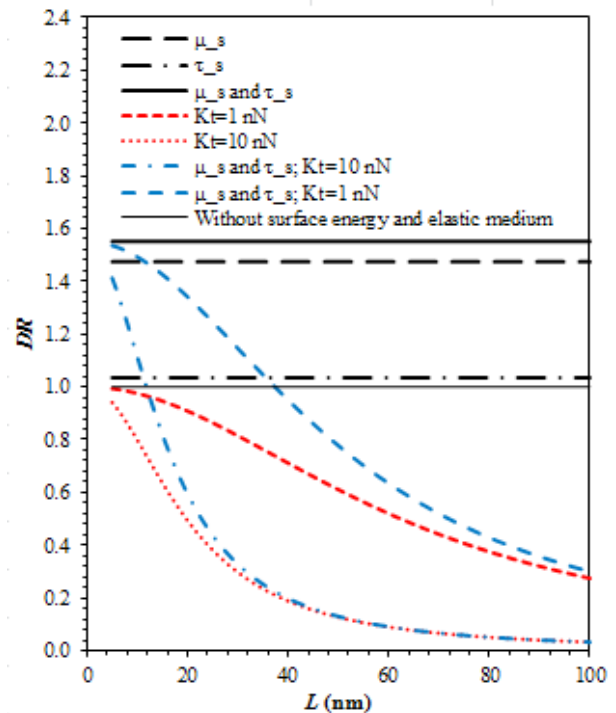


Fig. 5. Variations of rotational displacement ratio versus the length of nanorod for clamped-free boundary condition

شکل ۵: تغییرات نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای بر حسب طول نانومیله به ازای شرط مرزی گیردار-آزاد

سطح، دارای تأثیر یکسانی بر روی نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای نمی‌باشند و تأثیرگذاری مؤلفه μ_s بیشتر از τ_s می‌باشد به نحوی که می‌توان از اثر τ_s در مقایسه با μ_s صرف‌نظر نمود. نکته دیگری که شکل ۴ بیان می‌کند این است که میزان تأثیرگذاری مؤلفه‌های انرژی سطح وقتی به صورت همزمان در نظر گرفته شوند بیشتر از مجموع تأثیرگذاری تک‌تک آنها است. این امر نشان می‌دهد که تأثیر مؤلفه‌های انرژی سطح، از اصل برهم‌نهی تبعیت

رابطه (۴۰) نشان می‌دهد که تأثیر گشتاور خارجی، نه تنها به نوع آن بلکه به شرایط مرزی نانومیله نیز وابسته می‌باشد.

۴-۲-۲- بررسی اثر شعاع نانومیله

در شکل ۶، تغییرات نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای برحسب شعاع نانومیله رسم شده است. این شکل نشان می‌دهد که میزان تأثیر مؤلفه‌های انرژی سطح به شعاع نانومیله وابسته بوده و با افزایش شعاع نانومیله، از تأثیر انرژی سطح کاسته می‌شود. (این در حالیست که تأثیر انرژی سطح مستقل از طول نانومیله بوده است). نتایج دیگری که از شکل ۶ قابل مشاهده است مشابه نتایجی است که بیشتر در مورد شکل‌های ۴ و ۵ بیان شده است. به منظور مقایسه تأثیر نوع شرط مرزی نیز جدول ۴ تهیه شده است. در جدول ۴، مقادیر عددی منحنی‌های رسم شده در شکل ۶ به ازای شرایط مرزی CC و CF لیست شده است. این جدول مجدداً تأیید می‌نماید که تأثیر انرژی سطح، مستقل از نوع شرط مرزی نانومیله می‌باشد؛ اما تأثیر محیط الاستیک،

می‌توان این نتیجه‌گیری را بدین صورت کامل نمود که هرچه شرایط مرزی نانومیله، آزادتر باشد، تأثیرگذاری کاهش محیط الاستیک بر روی جابه‌جایی زاویه‌ای بیشتر می‌شود.

از آنجا که تفاوت تأثیر نوع شرط مرزی بر روی نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای، از مقایسه شکل‌های ۴ و ۵ قابل مشاهده نیست جدول ۳ تهیه شده است. علاوه بر این، در جدول ۳، تأثیر نوع گشتاور خارجی بر روی جابه‌جایی زاویه‌ای نانومیله‌ها به ازای دو شرط مرزی گیردار-گیردار^۱ و گیردار-آزاد^۲ جهت مقایسه آورده شده است. جدول ۳ نشان می‌دهد که تأثیر انرژی سطح بر روی نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای نانومیله، مستقل از نوع شرط مرزی نانومیله می‌باشد. همچنین جدول ۳ نشان می‌دهد که میزان تأثیرگذاری گشتاورهای خارجی بر روی نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای نانومیله با شرایط مرزی CC و CF به صورت رابطه (۴۰) می‌باشد:

$$\begin{aligned} CC : \quad & UTL = LTL < STL \\ CF : \quad & STL < UTL < LTL \end{aligned} \quad (40)$$

جدول ۳: مقادیر نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای نانومیله به ازای گشتاورهای خارجی متفاوت و طول‌های متفاوت نانومیله
Table 3. Values of rotational displacement ratio of nanorod for various external torques and various nanorod lengths

گیردار-آزاد						گیردار-گیردار						طول (nm)
STL-Case2	STL-Case1	LTL-Case2	LTL-Case1	UTL-Case2	UTL-Case1	STL-Case2	STL-Case1	LTL-Case2	LTL-Case1	UTL-Case2	UTL-Case1	
۱/۴۰۷	۰/۹۳۸	۱/۴۱۸	۰/۹۴۳	۱/۴۱۳	۰/۹۴۱	۱/۵۱۵	۰/۹۸۵	۱/۵۱۴	۰/۹۸۵	۱/۵۱۴	۰/۹۸۵	۵/۰
۱/۲۵۹	۰/۸۷۰	۱/۲۸۲	۰/۸۸۱	۱/۲۷۱	۰/۸۷۶	۱/۴۷۲	۰/۹۶۷	۱/۴۷۰	۰/۹۶۶	۱/۴۷۰	۰/۹۶۶	۷/۵
۱/۰۹۵	۰/۷۹۰	۱/۱۳۰	۰/۸۰۶	۱/۱۱۳	۰/۷۹۸	۱/۴۱۷	۰/۹۴۲	۱/۴۱۳	۰/۹۴۱	۱/۴۱۳	۰/۹۴۱	۱۰/۰
۰/۹۳۴	۰/۷۰۴	۰/۹۸۱	۰/۷۲۷	۰/۹۵۹	۰/۷۱۶	۱/۳۵۱	۰/۹۱۳	۱/۳۴۵	۰/۹۱۰	۱/۳۴۵	۰/۹۱۰	۱۲/۵
۰/۷۸۹	۰/۶۲۱	۰/۸۴۵	۰/۶۴۹	۰/۸۱۹	۰/۶۳۶	۱/۲۷۸	۰/۸۷۹	۱/۲۷۱	۰/۸۷۶	۱/۲۷۱	۰/۸۷۶	۱۵/۰
۰/۶۶۳	۰/۵۴۳	۰/۷۲۷	۰/۵۷۷	۰/۶۹۷	۰/۵۶۱	۱/۲۰۲	۰/۸۴۲	۱/۱۹۲	۰/۸۳۸	۱/۱۹۲	۰/۸۳۸	۱۷/۵
۰/۵۵۷	۰/۴۷۳	۰/۶۲۷	۰/۵۱۱	۰/۵۹۴	۰/۴۹۳	۱/۱۲۴	۰/۸۰۳	۱/۱۱۳	۰/۷۹۸	۱/۱۱۳	۰/۷۹۸	۲۰/۰

جدول ۴: مقادیر نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای نانومیله به ازای شرایط مرزی متفاوت و شعاع‌های متفاوت نانومیله
Table 4. Values of rotational displacement ratio of nanorod for various boundary conditions and various nanorod radii

گیردار-آزاد						گیردار-گیردار						شعاع (nm)		
$K_t=10$ nN	$K_t=1$ nN	τ_s	μ_s	μ_s and τ_s	Case3	Case2	$K_t=10$ nN	$K_t=1$ nN	τ_s	μ_s	μ_s and τ_s		Case3	Case2
۰/۶۱۶	۰/۹۴۲	۱/۰۴۴	۱/۶۷۲	۱/۷۹۹	۱/۶۱۹	۰/۸۴۴	۱/۸۶۷	۰/۹۸۵	۱/۰۴۴	۱/۶۷۲	۱/۷۹۹	۱/۷۵۰	۱/۴۰۷	۲/۰
۰/۷۹۸	۰/۹۷۵	۱/۰۳۵	۱/۴۷۴	۱/۵۵۱	۱/۴۹۳	۱/۱۱۳	۰/۹۴۱	۰/۹۹۴	۱/۰۳۵	۱/۴۷۴	۱/۵۵۱	۱/۵۳۶	۱/۴۱۳	۲/۵
۰/۸۹۲	۰/۹۸۸	۱/۰۲۹	۱/۳۶۶	۱/۴۲۰	۱/۳۹۶	۱/۲۱۱	۰/۹۷۱	۰/۹۹۷	۱/۰۲۹	۱/۳۶۶	۱/۴۲۰	۱/۴۱۴	۱/۳۶۲	۳/۰
۰/۹۳۸	۰/۹۹۳	۱/۰۲۵	۱/۲۹۸	۱/۳۴۰	۱/۳۲۸	۱/۲۳۲	۰/۹۸۴	۰/۹۹۸	۱/۰۲۵	۱/۲۹۸	۱/۳۴۰	۱/۳۳۷	۱/۳۱۱	۳/۵
۰/۹۶۳	۰/۹۹۶	۱/۰۲۲	۱/۲۵۱	۱/۲۸۵	۱/۲۷۹	۱/۲۲۵	۰/۹۹۰	۰/۹۹۹	۱/۰۲۲	۱/۲۵۱	۱/۲۸۵	۱/۲۸۴	۱/۲۷۰	۴/۰
۰/۹۷۷	۰/۹۹۸	۱/۰۱۹	۱/۲۱۷	۱/۲۴۶	۱/۲۴۲	۱/۲۱۰	۰/۹۹۴	۰/۹۹۹	۱/۰۱۹	۱/۲۱۷	۱/۲۴۶	۱/۲۴۵	۱/۲۳۷	۴/۵
۰/۹۸۵	۰/۹۹۸	۱/۰۱۷	۱/۱۹۲	۱/۲۱۶	۱/۲۱۴	۱/۱۹۳	۰/۹۹۶	۱/۰۰۰	۱/۰۱۷	۱/۱۹۲	۱/۲۱۶	۱/۲۱۵	۱/۲۱۰	۵/۰

- 1 Clamped-Clamped(CC)
- 2 Clamped-Free(CF)

جدول ۵: مقادیر نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای نانومیله به ازای گشتاورهای خارجی متفاوت و شعاع‌های متفاوت نانومیله

Table 5. Values of rotational displacement ratio of nanorod for various external torques and various nanorod radii

STL- Case2	STL- $K_t=10$ nN	گیردار-آزاد				گیردار-گیردار				شعاع (nm)		
		LTL- Case2	LTL- $K_t=10$ nN	UTL- Case2	UTL- $K_t=10$ nN	LTL- Case2	LTL- $K_t=10$ nN	UTL- Case2	UTL- $K_t=10$ nN			
۱/۰۹۵	۰/۷۹۰	۱/۱۳۰	۰/۸۰۶	۱/۱۱۳	۰/۷۹۸	۱/۴۱۷	۰/۹۴۲	۱/۴۱۳	۰/۹۴۱	۱/۴۱۳	۰/۹۴۱	۲/۵
۱/۱۹۲	۰/۹۸۴	۱/۱۹۴	۰/۹۸۵	۱/۱۹۳	۰/۹۸۵	۱/۲۱۰	۰/۹۹۶	۱/۲۱۰	۰/۹۹۶	۱/۲۱۰	۰/۹۹۶	۵/۰
۱/۱۳۰	۰/۹۹۷	۱/۱۳۰	۰/۹۹۷	۱/۱۳۰	۰/۹۹۷	۱/۱۳۳	۰/۹۹۹	۱/۱۳۳	۰/۹۹۹	۱/۱۳۳	۰/۹۹۹	۷/۵
۱/۰۹۶	۰/۹۹۹	۱/۰۹۶	۰/۹۹۹	۱/۰۹۶	۰/۹۹۹	۱/۰۹۷	۱/۰۰۰	۱/۰۹۷	۱/۰۰۰	۱/۰۹۷	۱/۰۰۰	۱۰/۰

Case1: $K_t=10$ nN; Case2: μ_s and τ_s ; $K_t=10$ nN; Case3: μ_s and τ_s ; $K_t=1$ nN

۴-۳- بررسی اثر مقدار مدول برشی

در ابتدا تأثیر مقدار مؤلفه مدول برشی سطحی بررسی می‌شود. بدین منظور در شکل ۷، تغییرات نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای نانومیله با شرایط مرزی CC و CF بر حسب مقدار مدول برشی سطحی رسم شده است. شکل ۷ نشان می‌دهد که تأثیر مدول برشی سطحی بر روی نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای بستگی به علامت مدول برشی سطحی دارد. بدین ترتیب که اگر مقدار مدول برشی سطحی، منفی باشد تأثیر آن یک تأثیر افزایشی بوده، به نحوی که سبب افزایش جابه‌جایی زاویه‌ای نانومیله یا به بیان دیگر سبب نرم شدن نانومیله می‌شود. این درحالیست که تأثیر متضادی برای وقتی که مقدار مدول برشی سطحی مثبت باشد مشاهده می‌شود. همچنین از شکل ۷ مشاهده می‌شود که به ازای مقادیر منفی مدول برشی سطحی، تأثیر کاهش محیط الاستیک بر روی نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای نانومیله بیشتر از حالتی است که مدول برشی سطحی دارای مقادیر مثبت باشد. علاوه بر این مشاهده می‌شود که تأثیر مدول برشی سطحی، مستقل از شرط مرزی

وابسته به نوع شرط مرزی نانومیله می‌باشد و هرچه شرایط مرزی نانومیله آزادتر باشد، تأثیر کاهش محیط الاستیک بیشتر می‌شود. به منظور بررسی تأثیر نوع گشتاور خارجی بر روی جابه‌جایی زاویه‌ای نانومیله‌ها، به ازای مقادیر مختلف برای شعاع نانومیله، جدول ۵ تهیه شده است. داده‌های جدول ۵، همان رابطه‌ای را که بیشتر در رابطه با جدول ۳ بیان شده است نتیجه می‌دهد (رابطه ۴۰). باید دقت داشت که با افزایش شعاع نانومیله، این رابطه صادق نمی‌باشد؛ چرا که تأثیر محیط الاستیک در شعاع‌های بزرگ نانومیله از بین می‌رود و تنها تأثیر انرژی سطح باقی می‌ماند. در بخش بعدی مقاله، تأثیر مقدار مؤلفه‌های انرژی سطح بر روی نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای نانومیله بررسی می‌شود. دلیل این بررسی این است که در مراجع، برای مواد مختلف با جهت‌های کریستالی مختلف، مقادیر متفاوتی برای مؤلفه‌های انرژی سطح گزارش شده است [۲ و ۱۸-۱۶]؛ بنابراین برای کلیت بخشیدن به نتایج، این بررسی انجام شده است.

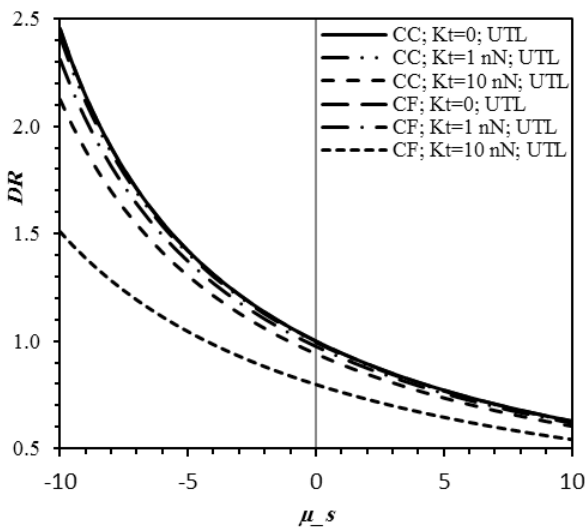


Fig. 7. Variations of displacement ratio versus the value of the surface shear modulus

شکل ۷: تغییرات نسبت جابه‌جایی بر حسب مقدار مدول برشی سطحی

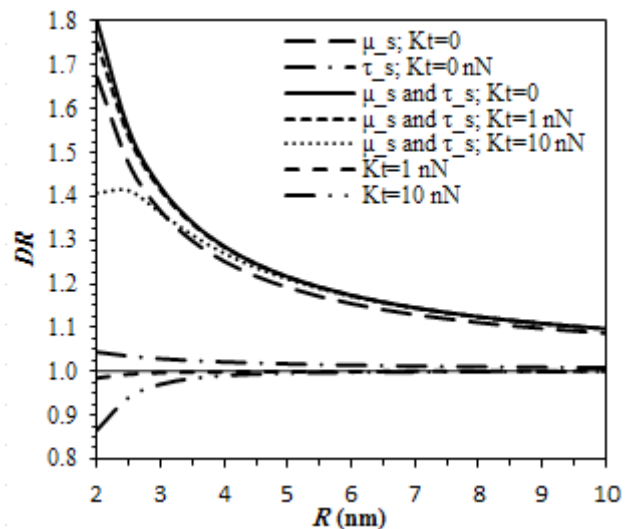


Fig. 6. Variations of displacement ratio versus the nanorod radius

شکل ۶: تغییرات نسبت جابه‌جایی بر حسب شعاع نانومیله

۴-۲-۵- بررسی اثر همزمان مقدار مدول برشی و تنش سطحی

در بخش پایانی این مقاله، تأثیر مقدار هر دو مؤلفه انرژی سطح (مدول برشی سطحی و تنش سطحی) بر روی نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای بررسی شده است. بدین منظور در شکل ۹، تغییرات نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای بر حسب $(\mu - \tau)$ رسم شده است. رفتار منحنی‌های رسم شده در این شکل بسیار شبیه به رفتار منحنی‌های رسم شده در شکل ۷ می‌باشد. تنها تفاوت قابل ذکر این است که هرچه مقدار منفی انرژی سطح بیشتر می‌شود تأثیر افزایشی آن به شدت روند صعودی دارد و به سمت مجانب عمودی میل می‌کند. این در حالیست که افزایش مقدار مثبت انرژی سطح، سبب می‌شود تأثیر کاهش آن به سمت مجانب افقی میل نماید. این رفتار نشان می‌دهد که تأثیر افزایشی انرژی سطح بسیار زیاد و تأثیر کاهش آن محدود می‌باشد.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، رفتار استاتیکی پیچشی نانومیل‌های محصور در محیط الاستیک با در نظر گرفتن اثر انرژی سطح به ازای دو شرط مرزی گیردار-گیردار و آزاد-آزاد به صورت تحلیلی بررسی شده است. نتایج عددی نشان می‌دهد که تأثیر انرژی سطح، اولاً: بستگی به علامت مؤلفه‌های آن دارد. بدین ترتیب که انرژی سطح با علامت منفی، دارای تأثیر افزایشی بر روی نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای، و انرژی سطح با علامت مثبت، دارای تأثیر کاهش می‌باشد. ثانیاً: تأثیر آن وابسته به شعاع نانومیل می‌باشد. مشاهده شده است که هر چه شعاع نانومیل بیشتر باشد اثر انرژی سطح، کمتر می‌شود. ثالثاً: تأثیر آن مستقل از طول و شرایط مرزی نانومیل می‌باشد. از طرفی مشاهده شده است که تأثیر محیط الاستیک همواره کاهش بوده و میزان تأثیر آن وابسته به طول، شعاع و شرایط مرزی نانومیل می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که هر چه طول نانومیل بیشتر باشد، تأثیر کاهش محیط الاستیک بر روی

نانومیل بوده اما تأثیر کاهش محیط الاستیک بر روی نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای نانومیل با شرط مرزی CF بیشتر از شرط مرزی CC می‌باشد (این نتایج پیشتر در شکل‌های ۴ و ۵ نیز مشاهده شده بود). نکته پایانی در مورد شکل ۷ این است که تأثیر افزایشی مدول برشی سطحی، بیشتر از تأثیر کاهش آن می‌باشد.

۴-۲-۴- بررسی اثر مقدار تنش سطحی

در شکل ۸ تغییرات نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای بر حسب مقدار تنش سطحی رسم شده است. اولین نتیجه آشکاری که شکل ۸ نشان می‌دهد این است که برخلاف تفاوت تأثیر مدول برشی سطحی با علامت آن، نوع تأثیر تنش سطحی، مشابه علامت آن می‌باشد. به این معنی که اگر تنش سطحی دارای مقدار مثبت باشد تأثیر آن افزایشی و اگر مقدار آن منفی باشد، تأثیر آن کاهش است.

همچنین از شکل ۸ مشاهده می‌شود که به ازای مقادیر مثبت تنش سطحی، اثر کاهش محیط الاستیک از تأثیر افزایشی تنش سطحی می‌کاهد؛ اما به ازای مقادیر منفی تنش سطحی، تأثیر کاهش محیط الاستیک بر تأثیر کاهش تنش سطحی می‌افزاید. نتیجه دیگری که شکل ۸ نشان می‌دهد این است که در محدوده‌ای که تأثیر محیط الاستیک و تنش سطحی هم نوع (هر دو دارای اثر کاهش هستند) می‌باشند، اختلاف منحنی‌ها کمی کمتر از حالتی است که تأثیر دو عامل فوق، متفاوت باشند. با مقایسه شکل‌های ۷ و ۸ می‌توان این نکته کلی را بیان نمود که منحنی‌های نسبت جابه‌جایی، در هر محدوده‌ای که اثر مؤلفه انرژی سطح با اثر محیط الاستیک هم نوع باشد در مقایسه با حالتی که اثر مؤلفه انرژی سطح با اثر محیط الاستیک هم نوع نباشد به یکدیگر نزدیک‌ترند.

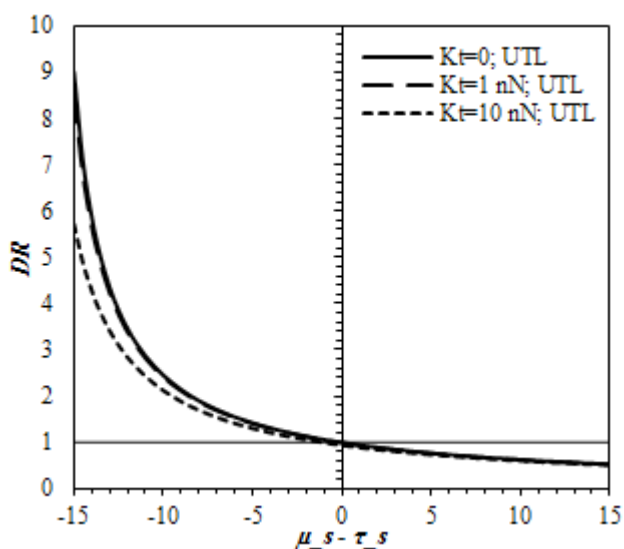


Fig. 9. Variations of rotational displacement ratio versus the sum of the values of the surface shear modulus and surface stress

شکل ۹: تغییرات نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای بر حسب مجموع مقدار مدول برشی سطحی و تنش سطحی

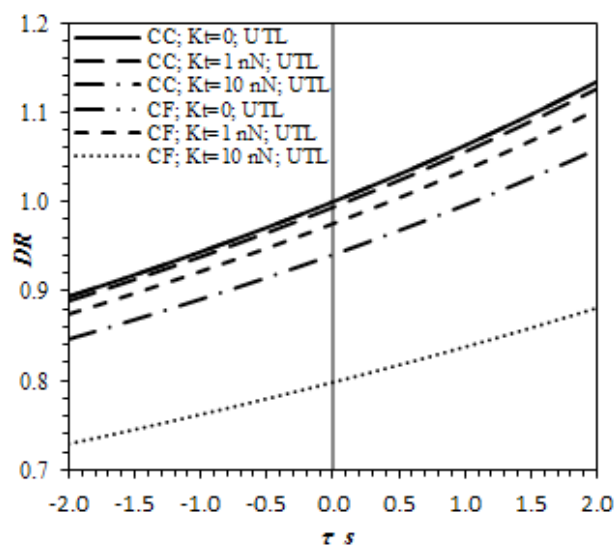


Fig. 8. Variations of displacement ratio versus the value of the surface stress

شکل ۸: تغییرات نسبت جابه‌جایی بر حسب مقدار تنش سطحی

+	لایه سطحی فوقانی
-	لایه سطحی زیرین
	زیرنویس‌ها
0	دامنه بارگذاری خارجی با مقدار ۱
1	حد پایین انتگرال
2	حد بالای انتگرال
e	بارگذاری خارجی
P	مؤلفه قطبی
s	نشان دهنده مؤلفه سطحی
x	کمیت در راستای محور x
y	کمیت در راستای محور y
z	کمیت در راستای محور z
α	متغیر معادل x یا y
β	متغیر معادل x یا y

مراجع

- [1] S. Hosseini-Hashemi, M. Zare, R. Nazemnezhad, An exact analytical approach for free vibration of Mindlin rectangular nano-plates via nonlocal elasticity, *Compo. Struct.*, 100 (2013) 290-299.
- [2] R. Nazemnezhad, M. Salimi, S.H. Hashemi, P.A. Sharabiani, An analytical study on the nonlinear free vibration of nanoscale beams incorporating surface density effects, *Composites Part B*, 43(8) (2012) 2893-2897.
- [3] C. Li, C.W. Lim, J. Yu, Twisting statics and dynamics for circular elastic nanosolids by nonlocal elasticity theory, *Acta Mech. Solida Sin.*, 24(6) (2011) 484-494.
- [4] C.W. Lim, C. Li, J. Yu, Free torsional vibration of nanotubes based on nonlocal stress theory, *J. Sound Vib.*, 331(12) (2012) 2798-2808.
- [5] M. Aydogdu, M. Arda, Torsional vibration analysis of double walled carbon nanotubes using nonlocal elasticity, *Int. J. Mech. Mater. Des.*, (2014) 1-14.
- [6] J. Loya, J. Aranda-Ruiz, J. Fernández-Sáez, Torsion of cracked nanorods using a nonlocal elasticity model, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 47(11) (2014) 115304.
- [7] C. Lim, M. Islam, G. Zhang, A nonlocal finite element method for torsional statics and dynamics of circular nanostructures, *Int. J. Mech. Sci.*, 94 (2015) 232-243.
- [8] M. Arda, M. Aydogdu, Torsional statics and dynamics of nanotubes embedded in an elastic medium, *Compo. Struct.*, 114 (2014) 80-91.
- [9] Y.T. Beni, M. Abadyan, Size-dependent pull-in instability of torsional nano-actuator, *Phys. Scripta*, 88(5) (2013) 055801.
- [10] R. Ansari, R. Gholami, S. Ajori, Torsional vibration analysis of carbon nanotubes based on the strain gradient

جابه‌جایی زاویه‌ای نانومیله هم بیشتر می‌شود؛ اما هرچه شعاع نانومیله بزرگتر باشد تأثیر کاهش آن، کم‌تر می‌شود. وابستگی تأثیر محیط الاستیک به شرایط مرزی نیز به این صورت است که هرچه شرط مرزی نانومیله آزادتر باشد، تأثیر کاهش محیط الاستیک بیشتر می‌شود. نتیجه دیگری که این پژوهش نشان می‌دهد این است که تأثیر گشتاور خارجی، نه تنها به نوع آن، بلکه به شرایط مرزی نانومیله نیز وابسته می‌باشد. یکی از عواملی که نتایج این پژوهش را مهم کرده این است که برای اثر اندازه، تأثیری کاهش بر روی هر دو جابه‌جایی‌های عرضی و پیچشی گزارش شده است؛ اما مشاهده شده است که انرژی سطح، دارای تأثیری افزایشی بر روی جابه‌جایی‌های عرضی و دارای تأثیری کاهش بر روی جابه‌جایی‌های پیچشی می‌باشند.

فهرست علائم

A	مساحت سطح مقطع نانومیله، m^2
DR	نسبت جابه‌جایی زاویه‌ای
E	مدول الاستیسیته، Pa
G	مدول برشی حجمی، Nm^{-2}
G_0	مدول برشی سطحی، Nm^{-1}
I_p	ممان اینرسی قطبی، m^4
K	انرژی جنبشی، J
K_t	ضریب سختی محیط الاستیک، N
LTL	بارگذاری خارجی خطی
R	شعاع نانومیله، nm
s	محیط نانومیله، nm
STL	بارگذاری خارجی سینوسی
t	زمان، s
T_e	گشتاور خارجی، nN
u	مؤلفه جابه‌جایی در جهت x
U	انرژی پتانسیل، J
UTL	بارگذاری خارجی یکنواخت
v	مؤلفه جابه‌جایی در جهت y
w	مؤلفه جابه‌جایی در جهت z
W	کار خارجی وارد بر نانومیله، J
\bar{x}	مؤلفه x بی‌بعد

علائم یونانی

δ	دلتهای کرونگر
ε	مؤلفه‌های کرنش در جهات گوناگون
θ	جابه‌جایی زاویه‌ای نانومیله
ν	ضریب پواسون
λ	ثابت لامه سطحی، Nm^{-1}
μ	ثابت لامه سطحی یا مدول برشی سطحی، Nm^{-1}
σ	مؤلفه‌های تنش در جهات گوناگون، TPa
τ	تنش پسماند سطحی، Nm^{-1}

بالانویس‌ها

- properties of nanosized structural elements, *Nanotechnology*, 11(3) (2000) 139.
- [16] C. Liu, R. Rajapakse, Continuum models incorporating surface energy for static and dynamic response of nanoscale beams, *IEEE T. Nanotechnol.*, 9(4) (2010) 422-431.
- [17] S. Hosseini-Hashemi, R. Nazemnezhad, An analytical study on the nonlinear free vibration of functionally graded nanobeams incorporating surface effects, *Composites Part B*, 52 (2013) 199-206.
- [18] S. Hosseini-Hashemi, I. Nahas, M. Fagher, R. Nazemnezhad, Surface effects on free vibration of piezoelectric functionally graded nanobeams using nonlocal elasticity, *Acta Mech.*, 225(6) (2014) 1555-1564.
- theory and molecular dynamic simulations, *J. Vib. Acoust.*, 135(5) (2013) 051016.
- [11] F. Khademolhosseini, A.S. Phani, A. Nojeh, N. Rajapakse, Nonlocal continuum modeling and molecular dynamics simulation of torsional vibration of carbon nanotubes, *IEEE T. Nanotechnol.*, 11(1) (2012) 34-43.
- [12] B. Gheshlaghi, S.M. Hasheminejad, Size dependent torsional vibration of nanotubes, *Physica E*, 43(1) (2010) 45-48.
- [13] Z. Islam, P. Jia, C. Lim, Torsional wave propagation and vibration of circular nanostructures based on nonlocal elasticity theory, *I. J. Appl. Mech.*, 6(02) (2014) 1450011.
- [14] S.S. Rao, *Vibration of continuous systems*, John Wiley & Sons, 2007.
- [15] R.E. Miller, V.B. Shenoy, Size-dependent elastic

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

R. Nazemnezhad, M. Aryanpour, Investigation of Torsional Static Behavior of Nano-rods Embedded in Elastic Medium Considering Surface Energy Effect, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 50(5) (2018) 961-972.

DOI: 10.22060/mej.2017.12197.5290



