

ارتعاشات آزاد غیرخطی در تیرهای منعطف با بخش میانی صلب و جرم نوک

اکبر دواق، حمید معین فرد^{*}، مجید معاونیان

دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

تاریخچه داوری:

دریافت: ۱۱ تیر ۱۳۹۵
بازنگری: ۴ فروردین ۱۳۹۶
پذیرش: ۱۷ اردیبهشت ۱۳۹۶
ارائه آنلاین: ۲۷ اردیبهشت ۱۳۹۶

کلمات کلیدی:

تیر منعطف با بخش میانی صلب
ارتعاش غیر خطی
شکل مد
تحلیل فرکانسی

چکیده: یک روش معمول به منظور بهینه کردن سفتی درجه آزادی یک سازوکار منعطف استفاده از یک جسم صلب میانی در تیرهای منعطف آن است. هدف این مقاله، بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی یک تیر منعطف با بخش میانی صلب است که در انتهای آن یک جرم متمرکز وصل شده است. به منظور تعیین معادلات دیفرانسیل جزئی غیرخطی حاکم بر رفتار تیر از اصل همپلتون استفاده می‌شود. سپس شکل مدهای خطی شده و بی‌بعد تیر منعطف به روش تحلیلی محاسبه می‌شود و با نتایج حاصله از نرم‌افزار آباکوس مقایسه می‌گردد. به کمک شکل مد اول سازوکار و معادلات لاگرانژ، معادلات دیفرانسیل دینامیکی حاکم به دست می‌آید. آنگاه این معادلات به صورت عددی به کمک نرم‌افزار متلب حل می‌گردد. تبدیل فوریه گسسته پاسخ‌های دینامیکی نشان می‌دهد که پاسخ دینامیکی عرضی تنها یک بسامد اصلی دارد؛ در حالی که پاسخ‌های محوری دینامیکی دارای سه بسامد اصلی می‌باشد. مشاهده می‌شود که این بسامدها، همان بسامدهای طبیعی سامانه خطی است که به صورت تحلیلی با فرم بسته قابل ارائه هستند. رویکرد ارائه شده در این پژوهش می‌تواند برای تحلیل و بهینه‌سازی رفتار دینامیکی سازوکارهای منعطف مورد استفاده قرار بگیرد.

۱- مقدمه

سازوکارهای منعطف^۱ در سامانه‌های دینامیکی از جمله تشدیدکننده‌های تک محوره^۲ [۱] تشدیدکننده‌های چند محوره^۳ [۲]، اسکنرهای سرعت بالا^۴ [۳]، ابزارهای برداشت انرژی^۵ [۴]، سامانه‌های نانو/میکرو موقعیت‌دهی^۶ [۵] کاربرد دارد. این سازوکارها به جای این که از مفصل‌های غلتشی یا لغزشی استفاده کنند، حرکت را با استفاده از تغییر شکل اجسام کنترل می‌کنند. این ویژگی آنها باعث می‌شود تا دقت سامانه بیشتر باشد.

ساختمان اصلی این سازوکارها از تیرهای منعطف تشکیل شده است. به منظور این که بازه حرکتی سامانه بیشتر شود باید تغییر شکل بزرگتری را به سازوکار وارد کرد که این قضیه سبب می‌گردد سامانه از نظر هندسی به حوزه غیرخطی وارد شود. اثرات غیرخطی، رفتار دینامیکی سامانه را تغییر می‌دهد. مدل خطی این سامانه‌ها جوابگوی تعیین مشخصات دینامیکی تجربی نبوده است [۶]؛ بنابراین ضروری است تا مدل‌سازی براساس رفتار غیرخطی سامانه انجام گیرد.

از آنجایی که تیرهای منعطف از لحاظ هندسی دارای طول بلند

با ضخامت کم می‌باشند، نظریه اویلر-برنولی می‌تواند رفتار استاتیکی، دینامیکی و ارتعاشاتی آن‌ها را با موفقیت مدل‌سازی کند. بر طبق این نظریه، صفحه عرضی تیر و محور خنثی آن بعد از تغییر شکل سازوکار، بدون تغییر باقی می‌ماند [۷]. این نظریه در هر دو حالت خطی و غیرخطی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مدل‌سازی نظری و آزمایشی ارتعاشاتی دامنه بزرگ تیرها، پیش از این به طور گسترده‌ای انجام شده است. به عنوان مثال نایفه^۷ و موک^۸ [۸] ارتعاشات غیرخطی تیرها را مدل‌سازی و تحلیل نمودند. کرسپو دا سیلوا^۹ [۹] معادلات غیرخطی را برای حرکت تیرهای اویلر-برنولی در حالت ارتعاشات پیچشی به دست آوردند. همچنین کرسپو دا سیلوا [۱۰] یک روش تحلیلی کاهش مرتبه برای دینامیک غیرخطی یک سازوکار چند تیره ارائه کرد. معین فرد و اوتر^{۱۱} [۱۱] ارتعاشات غیرخطی یک تیر منعطف با یک جرم انتهایی را مدل‌سازی کردند و عباراتی تحلیلی برای جابه‌جایی عرضی و محوری تیر فراهم نمودند.

در سازوکارهای منعطف، لازم است با دقت درجه آزادی به سفتی درجه آزادی و درجه قیدی سامانه، بهترین عملکرد را برای سازوکار ایجاد نمود. معمولاً سفتی در راستایی که درجه آزادی وجود دارد، باید دارای کمترین مقدار و در راستای درجه قیدی بیشترین حد را داشته باشد. اگرچه همیشه روی دادن

- 1 Flexure mechanisms
- 2 Single resonators
- 3 Multi-axis resonators
- 4 High speed scanners
- 5 Energy harvesting devices
- 6 Nano/micro positioning systems

7 Nayfeh
8 Mook
9 Crespo da silva
10 Awtar

نویسنده عهده‌دار مکاتبات: h_moeenfarad@um.ac.ir

۲-۱- به دست آوردن انرژی‌های تیر منعطف

جابه‌جایی در راستای X و Z را به ترتیب با U و W و شیب را با θ نشان می‌دهیم. چنانچه بر جرم انتهایی تیر نیروهای F_x, F_z و گشتاور M_y وارد گردد، جابه‌جایی انتهایی تیر در راستای بارهای وارد شده به ترتیب U_L یا (U_{tip}) ، W_L یا (W_{tip}) و θ_L یا (θ_{tip}) خواهد شد.

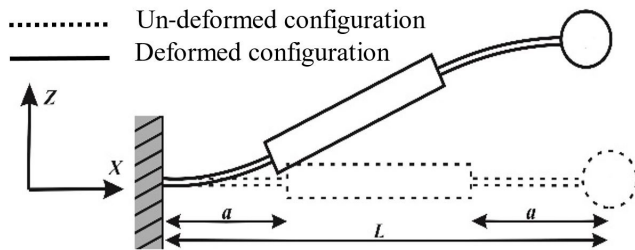


Fig. 1. Deformed and un-deformed configuration of a flexure beam with an intermediate rigid element and a tip mass

شکل ۱: تیر منعطف با بخش میانی صلب

از آنجایی که قسمت وسطی تیر صلب بوده و تغییر شکل نمی‌دهد؛ بنابراین می‌توان براساس هندسه، مطابق ذیل رابطه‌ای بین جابه‌جایی‌های دو سر جسم صلب به دست آورد.

$$W(L-a) = W(a) + (L-2a)W'(a) + (L-2a)\frac{W''(a)}{6} \quad (1)$$

$$U(L-a) = U(a) + (L-2a)\frac{W''(a)}{2} \quad (2)$$

$$W'(L-a) = W'(a) \quad (3)$$

از هندسه تیر همچنین می‌توان جابه‌جایی عرضی و محوری نقطه میانی جسم صلب را به صورت ذیل به دست آورد:

$$W(L/2, t) \approx W(a, t) + \frac{(L-2a)}{2} \frac{\partial W(X, t)}{\partial X} \Big|_{X=a} \quad (4)$$

$$U(L/2, t) \approx U(a, t) + \frac{(L-2a)}{4} \left(\frac{\partial W(X, t)}{\partial X} \Big|_{X=a} \right)^2 \quad (5)$$

۲-۱-۱- به دست آوردن انرژی پتانسیل تیر

حرکت تیر به صورت دو بعدی و در صفحه‌ای افقی در نظر گرفته می‌شود؛ بنابراین انرژی پتانسیل گرانشی در محاسبات ظاهر نمی‌شود. تنها انرژی پتانسیلی که مد نظر قرار می‌گیرد، انرژی پتانسیل کرنشی خواهد بود. با توجه به شرایط حرکتی، فرض می‌شود انرژی پتانسیل کرنشی تیر تنها ناشی از کرنش عمودی در راستای محور X باشد. کرنش غیرخطی ϵ_{xx} کرنش یک جزء دلخواه از بخش ارتجاعی تیر است که به فاصله Z از تار خنثی قرار دارد. این کرنش در رابطه زیر نشان داده شده است.

این حالت‌ها به صورت همزمان، ممکن نیست، اما راه‌هایی وجود دارد که به سازوکار کمک می‌کند تا بهینه‌ترین حالت حادث شود. یکی از رایج‌ترین و مناسب‌ترین روش‌ها برای رسیدن به این مقصود این است که یک جسم صلب در میانه تیر قرار گیرد. کاربرد این نوع طراحی در پژوهش‌های مختلفی بررسی شده است [۱۲]. رفتار استاتیکی تیرها با جسم صلب میانی به صورت غیرخطی توسط اوتر و اسلوکوم انجام گردیده است [۱۳]. اما تا جایی که نویسندگان می‌دانند، رفتار دینامیکی و ارتعاشاتی این نوع تیر هنوز بررسی نشده است. یک تیر با بخش میانی صلب و جرم نوک را می‌توان به عنوان یک سامانه چند عضوی در نظر گرفت (دو عضو منعطف به علاوه یک جسم صلب میانی و یک جرم متمرکز در انتها). حرکت این اعضا به شرایط بین آن‌ها مرتبط می‌باشد.

هدف از این مقاله بررسی رفتار دینامیکی یک تیر منعطف با بخش میانی صلب و جرمی متمرکز در انتهایی آن است. به منظور به دست آوردن شرایط مرزی و معادلات حاکم از اصل همپلتون بهره گرفته می‌شود. به علاوه شکل مدها و بسامدهای طبیعی سامانه به صورت تحلیلی محاسبه می‌شود و با مقادیر به دست آمده از نرم‌افزار آباکوس مقایسه می‌شود. با استفاده از شکل مد اول و معادلات لاگرانژ، معادلات دیفرانسیل دینامیکی سامانه محاسبه می‌شود و این معادلات با تبدیل فوریه گسسته^۱ تحلیل می‌گردد.

۲- تعریف مسأله و مدل‌سازی ریاضی

همانطور که گفته شد سازوکارهای منعطف از ماژول‌های متنوعی ساخته شده‌اند؛ بنابراین برای تحلیل یک سازوکار نیاز است تا هر یک از این ماژول‌ها مورد تجزیه و تحلیل قرار گیرد. یک نمونه از این ماژول‌ها، تیر منعطفی است که با توجه به شکل ۱ در وسط آن یک جسم صلب قرار دارد و همچنین یک جرم متمرکز نقطه‌ای در انتهایی آن قرار گرفته است.

طول تیر مطابق شکل ۱ برابر L و طول هر قسمت الاستیک آن، a است که به صورت متقارن در دو طرف جسم صلب قرار دارد. ضخامت تیر برابر H و عرض آن b می‌باشد و همچنین عرض تیر، حدود ده مرتبه نسبت به ضخامت آن بیشتر می‌باشد.

برای تحلیل این تیر از روش انرژی استفاده می‌شود، زیرا برای استفاده از روش نیوتن نیاز است تا اجزا تیر را از هم جدا نمود و نیروهای داخلی را نیز به حساب آوریم که این قضیه باعث پیچیدگی محاسبات و معادلات ریاضی می‌شود؛ اما در روش انرژی نیاز به محاسبه نیروهای داخلی نیست. مزیت دیگر استفاده از روش‌های انرژی، این است که شرایط مرزی حاکم بر رفتار مسأله نیز همراه با معادلات حاکم، به دست می‌آیند.

برای استفاده از روش‌های انرژی و به صورت ویژه اصل همپلتون، ابتدا لازم است انرژی پتانسیل و جنبشی کل تیر را به دست آورده و ساده‌سازی‌های لازم را انجام داد تا در مراحل بعد بتوان از آن‌ها استفاده کرد. این موضوع در قسمت بعدی مقاله مورد بررسی خواهد گرفت.

1 Discrete Fourier Transform(DFT)

۲-۱-۲- به دست آوردن انرژی جنبشی تیر

انرژی جنبشی تیر ذکر شده از سه قسمت انرژی جنبشی قسمت الاستیک، قسمت صلب میانی و جرم انتهایی تیر تشکیل شده است. انرژی جنبشی هر قسمت به دو بخش تقسیم می‌شود: انرژی جنبشی انتقالی و انرژی جنبشی دورانی. می‌توان نشان داد که نسبت بین انرژی جنبشی دورانی به انرژی جنبشی انتقالی برای قسمت الاستیک یک جزء تیر تقریباً از مرتبه $(H/L)^2$ است که H ضخامت تیر و L طول تیر می‌باشد [۸]. در نتیجه، با توجه به اینکه ضخامت تیر نسبت به طول آن بسیار کوچکتر است ($H \ll L$)، می‌توان از انرژی جنبشی دورانی قسمت الاستیک تیر در مقایسه با انرژی جنبشی انتقالی تیر صرف‌نظر نمود. علاوه بر این در یک تیر منعطف، بزرگی $U(X,t)$ از مرتبه دوم بزرگی $W(X,t)$ است ($U(X,t) = O(W(X,t)^2)$). لذا انرژی جنبشی ناشی از حرکت محوری قسمت الاستیک جزء تیر چهار مرتبه کوچکتر از انرژی جنبشی ناشی از حرکت عرضی آن می‌باشد؛ بنابراین می‌توان انرژی جنبشی انتقالی محوری بخش الاستیک را نیز نادیده گرفت. اما انرژی جنبشی انتقالی عرضی برای دو قسمت الاستیک اول و دوم تیر قابل صرف‌نظر نیست و به ترتیب به صورت J_1 و J_2 نشان داده خواهد شد. انرژی جنبشی جسم صلب میانی دارای دو قسمت انرژی جنبشی انتقالی و انرژی جنبشی دورانی می‌باشد. انرژی جنبشی انتقالی دارای دو مؤلفه است. این دو مؤلفه شامل انرژی جنبشی انتقالی در راستای X و راستای Z هستند. برای محاسبه انرژی جنبشی انتقالی از سرعت خطی نقطه میانی (مرکز جرم) جسم صلب استفاده می‌شود. انرژی جنبشی انتقالی محوری، عرضی و دورانی جسم صلب میانی به ترتیب با J_3 ، J_4 و J_5 بیان خواهند شد. از آنجایی که جرم نوک تیر، متمرکز (نقطه‌ای) فرض شده است، از انرژی جنبشی دورانی آن صرف‌نظر می‌کنیم؛ بنابراین جرم انتهایی تیر تنها دارای انرژی جنبشی انتقالی در راستاهای X و Z خواهد بود که به ترتیب با J_6 و J_7 نشان داده خواهند شد؛ لذا:

$$T = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 + J_7 \quad (14)$$

که:

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_0^a \rho A \left(\frac{\partial W(X,t)}{\partial t} \right)^2 dX \quad (15)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \int_{L-a}^L \rho A \left(\frac{\partial W(X,t)}{\partial t} \right)^2 dX \quad (16)$$

$$J_3 = \frac{1}{2} M \left(\frac{dU(L/2,t)}{dt} \right)^2 \quad (17)$$

$$J_4 = \frac{1}{2} M \left(\frac{dW(L/2,t)}{dt} \right)^2 \quad (18)$$

$$\epsilon_{XX} = U' + \frac{W'^2}{2} - W'' \cdot Z \quad (6)$$

انرژی پتانسیل کرنشی ذخیره شده V در بخش ارتجاعی تیر را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$V = \int_0^a E \cdot \epsilon_{XX}^2 \cdot A \cdot dx + \int_{L-a}^L E \cdot \epsilon_{XX}^2 \cdot A \cdot dx \quad (7)$$

که در این معادله، E مدول الاستیک ماده تیر و A مساحت سطح مقطع تیر است.

با قرار دادن معادله (۶) در معادله (۷) و انجام برخی ساده‌سازی‌ها، می‌توان به معادله ذیل رسید.

$$V = \frac{EA}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial U(X,t)}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W(X,t)}{\partial X} \right)^2 \right)^2 dX + \frac{EI}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial^2 W(X,t)}{\partial X^2} \right)^2 dX + \frac{EA}{2} \int_{L-a}^L \left(\frac{\partial U(X,t)}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W(X,t)}{\partial X} \right)^2 \right)^2 dX + \frac{EI}{2} \int_{L-a}^L \left(\frac{\partial^2 W(X,t)}{\partial X^2} \right)^2 dX \quad (8)$$

در صورتی که جابه‌جایی راستای X نقاط تیر یک مرتبه کوچکتر از جابه‌جایی راستای Z آن نقاط باشند، می‌توان فرض کرد که کرنش تار خنثی در طول تیر ثابت می‌ماند [۸]. چنانچه در تیر مورد بررسی نیز چنین باشد، در طول تیر ثابت می‌ماند $\epsilon_{XX} = U' + (W')^2/2$ و لذا با انجام عملیات ریاضی و با توجه به معادله (۲) که از هندسه تیر به دست آمده است، انرژی پتانسیل تیر را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$V = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \quad (9)$$

$$I_1 = \frac{EA}{2a} \left\{ U(a,t) + \int_0^a \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W(X,t)}{\partial X} \right)^2 dX \right\}^2 \quad (10)$$

$$I_2 = \frac{EI}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial^2 W(X,t)}{\partial X^2} \right)^2 dX \quad (11)$$

$$I_3 = \frac{EA}{2a} \left\{ U(L,t) - U(a,t) - \frac{(L-2a)}{2} \left(\frac{\partial W(a,t)}{\partial X} \right)^2 + \int_{L-a}^L \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W(X,t)}{\partial X} \right)^2 dX \right\}^2 \quad (12)$$

$$I_4 = \frac{EI}{2} \int_{L-a}^L \left(\frac{\partial^2 W(X,t)}{\partial X^2} \right)^2 dX \quad (13)$$

$$\alpha = \frac{a}{L} \quad (27)$$

$$\tau = \frac{t}{B} \quad (28)$$

$$m = \frac{M}{\rho AL} \quad (29)$$

$$i = \frac{I_M}{\rho AL^3} \quad (30)$$

$$m_e = \frac{M_E}{\rho AL} \quad (31)$$

که در معادله (۲۸) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$B = \sqrt{\frac{\rho AL^4}{EI}} \quad (32)$$

با استفاده از پارامترهای بی‌بعد معرفی شده، معادلات حاکم به صورت بی‌بعد شده زیر به دست می‌آیند.

$$\frac{\partial^4 w(x, \tau)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x, \tau)}{\partial \tau^2} = 0 \quad 0 < x < \alpha \quad (33)$$

$$\frac{\partial^4 w(x, \tau)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x, \tau)}{\partial \tau^2} = 0 \quad 1 - \alpha < x < 1 \quad (34)$$

همچنین شرایط مرزی بی‌بعد نیز به صورت زیر خواهند بود.

$$w(0, \tau) = 0 \quad (35)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0, \tau) = 0 \quad (36)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(1, \tau) = 0 \quad (37)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(1, \tau) - m_e \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}(1, \tau) = 0 \quad (38)$$

$$w(1 - \alpha, \tau) - w(\alpha, \tau) - (1 - 2\alpha) \frac{\partial w}{\partial x}(\alpha, \tau) = 0 \quad (39)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(1 - \alpha, \tau) - \frac{\partial w}{\partial x}(\alpha, \tau) = 0 \quad (40)$$

$$m \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}(\alpha, \tau) + \frac{(1 - 2\alpha)}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial \tau^2 \partial x}(\alpha, \tau) \right) - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(\alpha, \tau) + \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(1 - \alpha, \tau) = 0 \quad (41)$$

$$J_5 = \frac{1}{2} I_M \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X \partial t}(a, t) \right)^2 \quad (19)$$

$$J_6 = \frac{1}{2} M_E \left(\frac{dU(L, t)}{dt} \right)^2 \quad (20)$$

$$J_7 = \frac{1}{2} M_E \left(\frac{dW(L, t)}{dt} \right)^2 \quad (21)$$

در این روابط، ρ چگالی جرمی ماده تیر، M جرم جسم صلب میانی، I_M ممان اینرسی حول مرکز جرم جسم و M_E اندازه جرم نوک تیر است.

۳- تحلیل ارتعاشاتی تیر منعطف با بخش میانی صلب

در این بخش بسامدها و شکل مدهای تیر مورد مطالعه به دست می‌آیند. برای این منظور از اصل همیتون استفاده می‌شود که با استفاده از آن می‌توان معادلات و شرایط مرزی را محاسبه نمود. اصل همیتون به شکل زیر می‌باشد.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta V - \delta T - \delta \bar{W}_{Ext}) dt = 0 \quad (22)$$

در معادله (۲۲)، انرژی پتانسیل است که در رابطه (۸) در بخش قبل به دست آمد. T نیز انرژی جنبشی است که قبلاً در رابطه (۱۴) محاسبه گردیده است و \bar{W}_{Ext} کار نیروهای خارجی است. از آنجایی که برای محاسبه بسامد طبیعی، باید ارتعاشات آزاد نامیرا مورد مطالعه قرار گیرد؛ بنابراین نیروهای خارجی و کار آن‌ها مدنظر قرار نخواهند گرفت.

همانطور که در بخش‌های قبل ملاحظه شد، انرژی پتانسیل از ۴ قسمت و انرژی جنبشی از ۷ قسمت تشکیل شده است؛ بنابراین برای محاسبه تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل می‌توان عملگر تغییرات را جداگانه به همه قسمت‌های آن اعمال نمود. بدین ترتیب داریم:

$$\delta V = \delta I_1 + \delta I_2 + \delta I_3 + \delta I_4 \quad (23)$$

$$\delta T = \delta J_1 + \delta J_2 + \delta J_3 + \delta J_4 + \delta J_5 + \delta J_6 + \delta J_7 \quad (24)$$

حال چنانچه معادلات (۲۳) و (۲۴) در معادله (۲۲) قرار گیرد و تغییرات متغیرهای مختلف از هم منفک گردند، شرایط مرزی و معادلات حاکم به دست خواهد آمد. از آنجایی که معادلات به صورت بی‌بعد شده مناسب‌تر خواهند بود، می‌توان شرایط مرزی و معادلات حاکم را با استفاده از رابطه‌های زیر بی‌بعد کرد.

$$x = \frac{X}{L} \quad (25)$$

$$w = \frac{W}{L} \quad (26)$$

$$m\beta_k^4 \left(\frac{(1-2\alpha)}{2} \varphi_k(\alpha) + \frac{(1-2\alpha)^2}{4} \frac{d\varphi_k(\alpha)}{dx} \right) + i\beta_k^4 \left(\frac{d\varphi_k(\alpha)}{dx} \right) - \frac{d^2\varphi_k(\alpha)}{dx^2} + \frac{d^2\varphi_k(1-\alpha)}{dx^2} - (1-2\alpha) \frac{d^3\varphi_k}{dx^3} (1-\alpha) = 0 \quad (54)$$

در این معادلات β_k به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\beta_k = \sqrt{\omega_k} \quad (55)$$

حل معادلات (۴۵) و (۴۶) به صورت ذیل است.

$$\varphi_k(x) = c_1^{(k)} \sin(\beta_k x) + c_2^{(k)} \cos(\beta_k x) + c_3^{(k)} \sinh(\beta_k x) + c_4^{(k)} \cosh(\beta_k x) \quad 0 < x < \alpha \quad (56)$$

(۵۷)

با جایگذاری معادلات (۵۶) و (۵۷) در شرایط مرزی (۴۷) تا (۵۴) یک سری معادله جبری خطی همگن بر حسب $c_i(k)$ تا $c_8(k)$ به شکل زیر به دست می‌آید.

$$[A(k)] C_k = 0 \quad (58)$$

که:

$$C_k = [c_1^{(k)} \ c_2^{(k)} \ c_3^{(k)} \ c_4^{(k)} \ c_5^{(k)} \ c_6^{(k)} \ c_7^{(k)} \ c_8^{(k)}]^T \quad (59)$$

در این معادلات بالانویس T به معنای ترانپوز می‌باشد. همچنین $[A(k)]_{8 \times 8}$ ماتریس ضرایب C_k می‌باشد. برای حل غیربدهی معادله (۵۸) باید دترمینان $[A(k)]$ را برابر صفر قرار داد که بی‌نهایت جواب خواهد داشت. که این ریشه‌ها همان β_k هایی هستند که با استفاده از رابطه (۵۵)، بسامدهای طبیعی تیر منعطف را نتیجه می‌دهند. همچنین با استفاده از بردارهای ویژه ماتریس $[A(k)]$ ، شکل مدهای سامانه نیز به دست می‌آیند. قسمت میانی تیر، جسم صلب است که در شکل مد به صورت یک خط راست بدون تغییر شکل خواهد بود و انتهای قسمت الاستیک اول را به ابتدای قسمت الاستیک دوم وصل می‌نماید.

نتایج روش دقیق را می‌توان توسط روش عددی اجزا محدود تأیید نمود. بدین منظور تیر مورد نظر، با مشخصات ذکر شده در جدول ۱ با روش ارائه شده و همچنین با نرم‌افزار آباکوس تحلیل می‌گردد و بسامدهای طبیعی و شکل مدهای آن محاسبه می‌شود. در جدول ۲ مقایسه بین نتایج حل دقیق و حل اجزا محدود انجام گرفته است.

در جدول ۲ درصد خطا به این شکل تعریف می‌شود:

(۶۰)

$$m \left(\frac{(1-2\alpha)}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}(\alpha, \tau) + \frac{(1-2\alpha)^2}{4} \frac{\partial^3 w}{\partial \tau^2 \partial x}(\alpha, \tau) \right) + i \left(\frac{\partial^3 w}{\partial \tau^2 \partial x}(\alpha, \tau) \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(\alpha, \tau) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(1-\alpha, \tau) + (1-2\alpha) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(1-\alpha, \tau) = 0 \quad (42)$$

چنانچه فرض شود که تیر منعطف در شکل مد k ام با بسامد طبیعی ω_k ارتعاش می‌کند، آنگاه پاسخ تیر منعطف به صورت زیر خواهد بود.

$$w_k(x, \tau) = \varphi_k(x) e^{i\omega_k \tau}, \quad k \in N \quad (43)$$

که در این رابطه $\varphi_k(x)$ شکل مد k ام تیر منعطف می‌باشد و همچنین ω_k بسامد طبیعی بی‌بعد شده سامانه است. لازم به یادآوری است که بسامد ω بعد تیر منعطف از عبارت زیر قابل محاسبه است.

$$\omega = \frac{\omega_k}{B} \quad (44)$$

حال با جایگذاری رابطه (۴۳) در معادلات حاکم (۳۳) و (۳۴)، و شرایط مرزی (۳۵) تا (۴۲)، این روابط به صورت زیر بیان خواهند گشت.

$$\frac{d^4 \varphi_k(x)}{dx^4} - \beta_k^4 \varphi_k(x) = 0 \quad 0 < x < \alpha \quad (45)$$

$$\frac{d^4 \varphi_k(x)}{dx^4} - \beta_k^4 \varphi_k(x) = 0 \quad 1-\alpha < x < 1 \quad (46)$$

$$\varphi_k(0) = 0 \quad (47)$$

$$\left. \frac{d\varphi_k(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (48)$$

$$\left. \frac{d^2\varphi_k(x)}{dx^2} \right|_{x=0} = 0 \quad (49)$$

$$\left(\frac{d^3\varphi_k}{dx^3} + m_e \beta_k^4 \varphi_k(x) \right) \Big|_{x=1} = 0 \quad (50)$$

$$\varphi_k(1-\alpha) - \left(\varphi_k(x) + (1-2\alpha) \frac{d\varphi_k}{dx} \right) \Big|_{x=\alpha} = 0 \quad (51)$$

$$\left. \frac{d\varphi_k}{dx} \right|_{x=\alpha} = \left. \frac{d\varphi_k}{dx} \right|_{x=1-\alpha} \quad (52)$$

$$\left(m \beta_k^4 \left(\frac{(1-2\alpha)}{2} \frac{d\varphi_k}{dx} + \varphi_k(x) \right) + \frac{d^3\varphi_k}{dx^3} \right) \Big|_{x=\alpha} - \left(\frac{d^3\varphi_k}{dx^3} \right) \Big|_{x=1-\alpha} = 0 \quad (53)$$

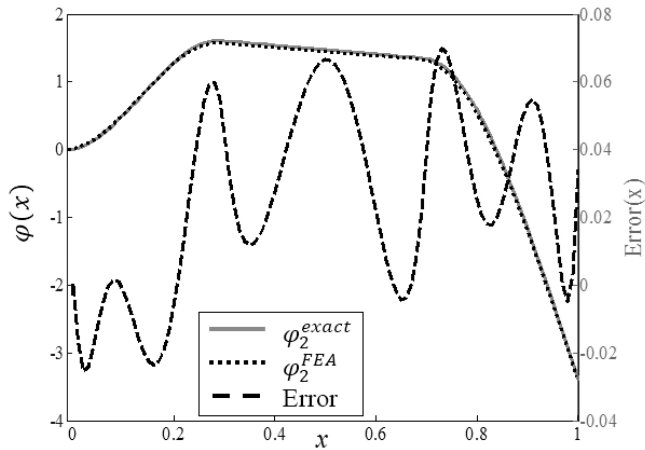


Fig. 3. Comparison of the analytical and numerical prediction of the second mode shape of the system

شکل ۳: شکل مد دوم، مقایسه روش حل دقیق با حل عددی

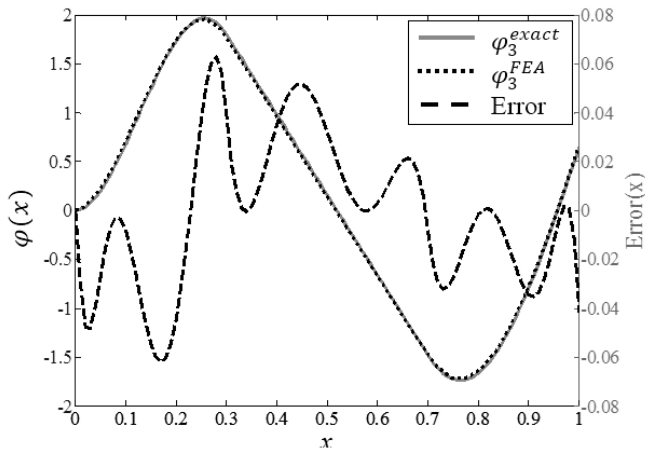


Fig. 4. Comparison of the analytical and numerical prediction of the third mode shape of the system

شکل ۴: شکل مد سوم، مقایسه روش حل دقیق با حل عددی

به این صورت است که پاسخ دینامیکی، به صورت ترکیبی از شکل مدهای سامانه در نظر گرفته شود. می‌توان نشان داد که در بسیاری از سامانه‌های دینامیکی، شکل مد اول درصد قابل توجهی از پاسخ دینامیکی را شامل می‌شود [۱۴، ۱۵]. با استفاده از این موضوع در تیر منعطف مورد بررسی، داریم:

$$W(X, t) = \frac{\varphi(X)}{\varphi(L)} W(L, t) \quad (61)$$

در معادله (۶۱)، $\varphi(X)$ شکل مد اول سامانه و $W(L, t)$ جابه‌جایی عرضی نوک تیر در زمان t می‌باشد.

با جایگزین کردن معادله (۶۱) در روابط (۹) و (۱۴) می‌توان انرژی پتانسیل و جنبشی تیر منعطف با بخش میانی را برحسب شکل مد اول نوشت. فرض می‌شود که بخش‌های منعطف تیر دارای میرایی باشند و میرایی آن بصورت C_r بر واحد طول تعریف می‌شود. کار مجازی نیروی میرایی بر روی سامانه با $\delta W_c^{(e)}$ نشان داده می‌شود و بر حسب $\varphi(X)$ داریم:

جدول ۱: مشخصات تیر منعطف با بخش میانی صلب

Table 1. Properties of flexure beam with intermediate rigid part

مقدار	پارامتر	مقدار	پارامتر
۹۳/۶	M, g	۰/۳	L, m
۱۵/۶	M_E, g	۰/۰۹	a, m
۱۱۳/۱	$I_M, kg.mm^2$	۱	t, mm
۷۸۰۰	$\rho, kg/m^3$	۱۰	b, mm
۲۰۰	E, GPa	۸/۳۳۳	I, mm^4

جدول ۲: مقایسه دو روش حل دقیق و اجزا محدود

Table 2. Comparison of exact solution and finite element results

نوع حل	بسامد طبیعی اول، rad/s	بسامد طبیعی دوم، rad/s	بسامد طبیعی سوم، rad/s
دقیق	۰/۴۴۸	۳/۸۸۵	۹/۸۸۶
اجزا محدود	۰/۴۴۸	۳/۸۶۵	۹/۸۰۶
خطا	۰/۰	۰/۵	۰/۸

همانطور که در جدول ۲ ملاحظه می‌گردد، درصد خطا بین بسامدهای حل دقیق و عددی بسیار کم و حتی برای بسامد اول تا سه رقم اعشار، صفر می‌باشد. در ادامه نمودارهای شکل مد اول تا سوم تیر منعطف رسم شده است در هر نمودار شکل مد حل دقیق با حل عددی مقایسه شده است. با بررسی شکل ۲ تا شکل ۴ می‌توان ملاحظه کرد که شکل مدهای دو روش حل با درصد خطای کمی مشابه یکدیگر می‌باشند. این قضیه از خطای کم بین بسامدهای طبیعی قابل پیش بینی بود.

۴- تحلیل دینامیکی تیر منعطف با بخش میانی صلب

در این قسمت به مدل‌سازی رفتار دینامیکی تیر منعطف پرداخته می‌شود. یک روش رایج برای مدل کردن سامانه‌های دینامیکی خطی و غیرخطی،

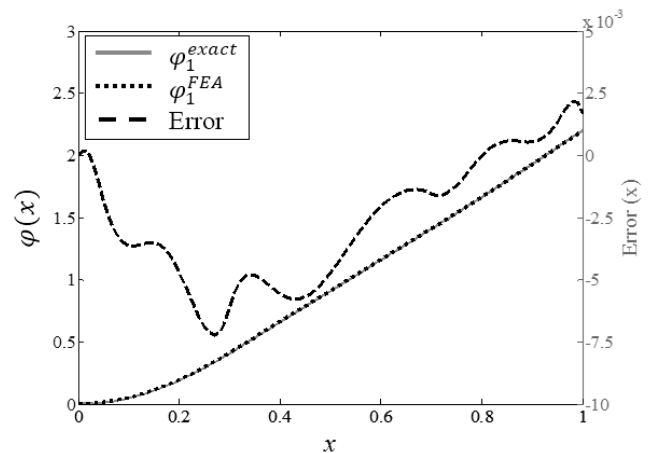


Fig. 2. Comparison of the analytical and numerical prediction of the first mode shape of the system

شکل ۲: شکل مد اول، مقایسه روش حل دقیق با حل عددی

$$\frac{d^2 w_t(\tau)}{d\tau^2} + \frac{c_{32}}{c_{31}} w_t^2(\tau) \left(\frac{d^2 w_t(\tau)}{d\tau^2} \right) + \frac{c_{33}}{c_{31}} w_t(\tau) \left(\frac{d^2 u_\alpha(\tau)}{d\tau^2} \right) \quad (62)$$

$$+ \frac{c_{34}}{c_{31}} w_t(\tau) \left(\frac{d^2 w_t(\tau)}{d\tau^2} \right)^2 + \frac{c_{35}}{c_{31}} \left(\frac{dw_t(\tau)}{d\tau} \right) \quad (72)$$

$$+ \frac{c_{36}}{c_{31}} w_t(\tau) u_\alpha(\tau) + \frac{c_{37}}{c_{31}} w_t(\tau) u_t(\tau) + w_t(\tau)$$

$$+ \frac{c_{38}}{c_{31}} w_t^3(\tau) = f_z$$

همچنین اگر بر نوک تیر نیروی F_z در راستای Z وارد شود، کار مجازی آن به شکل زیر بیان می‌گردد.

$$\delta W_{F_z}^{(e)} = F_z \delta W(L, t) \quad (63)$$

بنابراین کار کل مجازی انجام شده روی سامانه بدین صورت می‌باشد:

$$\delta W_{ext} = \delta W_c^{(e)} + \delta W_{F_z}^{(e)} \quad (64)$$

با جایگذاری معادلات (62) و (63) در معادله (64) داریم:

$$\delta W_{ext} = \left(\left(F_z - \frac{C_t}{\varphi^2(L)} \frac{dW(L, t)}{dt} \left(\int_0^a \varphi^2(x) dx + \int_{L-a}^L \varphi^2(x) dx \right) \right) \right) \delta W(L, t) \quad (65)$$

باید به این نکته توجه داشت که هدف از نظر گرفتن کار مجازی ناشی از نیروی میرایی، بررسی ارتعاشات آزاد میرا بوده است. از طرفی، در نظر گرفتن نیروی F_z ، به منظور بررسی ارتعاشات اجباری سامانه نیست. بلکه صرفاً هدف ارائه یک فرمولاسیون کامل‌تر، و همچنین کمک به یافتن یک شرط اولیه مناسب برای تحلیل ارتعاشات آزاد سامانه است. در این مورد در قسمت یافتن پاسخ ارتعاشات آزاد بیشتر توضیح داده خواهد شد. به جهت سهولت در نوشتار، پارامترها را بی‌بعد می‌کنیم:

$$\phi = \frac{\varphi}{L} \quad (66)$$

$$w_t = \frac{W(L, t)}{L} \quad (67)$$

$$u_t = \frac{U(L, t)}{L} \quad (68)$$

$$u_\alpha = \frac{U(a, t)}{L} \quad (69)$$

برای به‌دست آوردن معادلات دینامیکی از روش لاگرانژ استفاده می‌شود. انرژی پتانسیل و جنبشی سامانه و همچنین کار مجازی انجام شده روی سامانه همگی تابعی از u_t ، w_t و u_α می‌باشند؛ بنابراین با استفاده از رابطه لاگرانژ معادلات حاکم بی‌بعد شده به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{d^2 u_\alpha(\tau)}{d\tau^2} + c_{11} w_t(\tau) \left(\frac{d^2 w_t(\tau)}{d\tau^2} \right) + c_{11} \left(\frac{dw_t(\tau)}{d\tau} \right)^2 + c_{12} u_\alpha(\tau) + c_{13} u_t(\tau) + c_{14} w_t^2(\tau) = 0 \quad (70)$$

$$\frac{d^2 u_t(\tau)}{d\tau^2} + c_{21} u_t(\tau) + c_{22} u_\alpha(\tau) + c_{23} w_t^2(\tau) = 0 \quad (71)$$

که τ و f_z به صورت ذیل می‌باشند و ضرایب c_{ij} نیز در پیوست آمده است.

$$\tau = \omega_n t \quad (73)$$

$$f_z = \frac{F_z}{L \omega_n^2 c_{31}} \quad (74)$$

ω_n در معادلات (73) و (74) به صورت زیر برحسب پارامتر P که در معادله (76) ارائه شده، تعریف می‌شود.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{P}{c_{31}}} \quad (75)$$

$$P = \frac{EI}{\varphi^2(L)} \left(\int_0^a \left(\frac{d^2 \varphi}{dX^2} \right)^2 dX + \int_{L-a}^L \left(\frac{d^2 \varphi}{dX^2} \right)^2 dX \right) \quad (76)$$

باید دقت داشت که ω_n بسامد طبیعی اول سامانه در حالت بی‌بعد می‌باشد که در راستای عرضی اتفاق می‌افتد. با توجه به نحوه بی‌بعدسازی معادلات، بسامد طبیعی اول بی‌بعد سامانه در راستای عرضی، برابر با یک می‌باشد. در تحلیل ارتعاشات آزاد، از عبارت‌های تحریک نیرویی در معادله (72) صرف‌نظر می‌شود. آنگاه معادلات دیفرانسیل دینامیکی را به فضای حالت انتقال داده و با استفاده از دستور ode45 در نرم‌افزار متلب آن‌ها را حل می‌کنیم. باید دقت داشت که برای حل معادلات (70) تا (72)، نیاز به ۶ شرط اولیه هست که سه شرط اولیه آن سرعت اولیه $u_t(\tau)$ و $u_\alpha(\tau)$ می‌باشد که صفر فرض می‌شود. سه شرط اولیه جابه‌جایی نیز از حالت خیز استاتیکی با مشخصات جدول ۱ و نیروی عرضی f_z برابر با ۰/۱۲۵ مورد استفاده قرار می‌گیرد. در واقع با حذف عبارت‌های شامل مشتقات زمانی در معادلات دینامیکی (72)–(70) و جایگذاری ۰/۱۲۵ به جای f_z ، مقادیر عددی درجات آزادی به صورت ذیل به دست می‌آیند.

$$w_t(0) = 0.139541 \quad (77)$$

$$u_t(0) = -5.8595 \times 10^{-4} \quad (78)$$

$$u_\alpha(0) = -2.0566 \times 10^{-3} \quad (79)$$

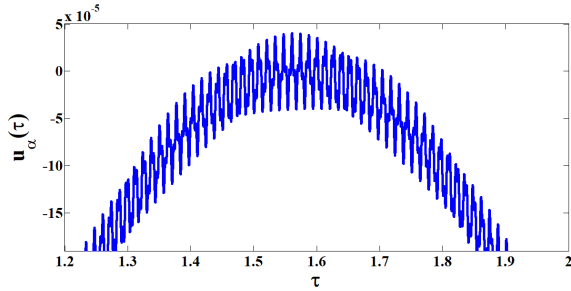


Fig. 8. Dimensionless axial response of flexure beam with magnification at $x = \alpha$

شکل ۸: پاسخ محوری بی‌بعد تیر منعطف با بزرگنمایی در $x = \alpha$

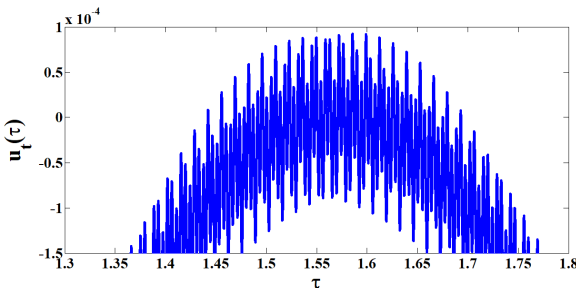


Fig. 9. Dimensionless axial response of flexure beam with magnification at $x = 1$

شکل ۹: پاسخ محوری بی‌بعد تیر منعطف با بزرگنمایی در $x = 1$

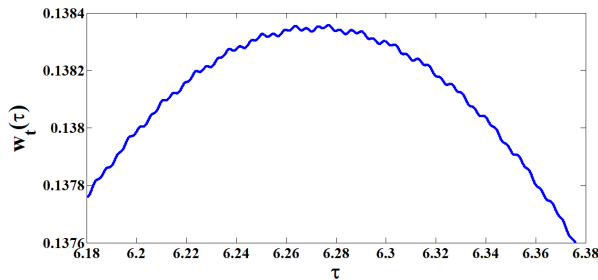


Fig. 10. Dimensionless transverse response of flexure beam with magnification at $x = 1$

شکل ۱۰: پاسخ عرضی بی‌بعد تیر منعطف با بزرگنمایی در $x = 1$

به منظور بررسی محتوای بسامدهای پاسخ دینامیکی، تبدیل فوریه گسسته یک طرفه u_t و w_t که با $|U_t(\omega)|$ ، $|U_\alpha(\omega)|$ و $|W_t(\omega)|$ نشان داده خواهد شد به ترتیب در شکل ۱۱ تا شکل ۱۵ رسم شده است. شکل ۱۵ نشان می‌دهد که دامنه بسامد اصلی w_t برابر با $1/0.49$ می‌باشد و همانطور که انتظار می‌رفت به یک بسیار نزدیک است. یعنی چنانچه معادله دیفرانسیل خطی رابطه (۷۲) تشکیل شود، بسامد آن‌ها برابر یک می‌شود که مؤید صحت پاسخ w_t می‌باشد بسامدهای بالاتر در راستای عرضی بسیار کم دامنه هستند، به طوری که می‌توان از آن صرف نظر کرد. تبدیل فوریه گسسته یک طرفه u_α و u_t نیز در شکل ۱۱ تا شکل ۱۴ نشان داده شده‌اند. همانطور که قبلاً نیز گفته شد، مشاهده می‌شود که بسامد اصلی پاسخ دینامیکی محوری دو برابر بسامد اصلی پاسخ دینامیکی عرضی است. علاوه بر این اگر به نمودار در بسامدهای بسیار بالاتر توجه شود، به دو قله برمی‌خوریم که مقدار بسامد بی‌بعد آن‌ها برابر با $479/12$ و $1405/0.2$ است. این بسامدها، بسامدهای

چنانچه معادلات حاکم با شرایط اولیه ذکر شده (با نیروی عرضی $f_z=0$) حل شود، می‌توان نمودارهای ارتعاشی u_α ، u_t و w_t را بر حسب زمان بی‌بعد، به ترتیب مطابق شکل ۵، شکل ۶ و شکل ۷ رسم نمود. با دقت در این نمودارها مشاهده می‌شود هنگامی که w_t از مقدار بیشینه به مقدار کمینه دامنه خود حرکت می‌کند، u_α و u_t فاصله بین مقدار کمینه به صفر و از صفر به کمینه را طی می‌کند. این بدان معنی است که هر نیم سیکل w_t با یک سیکل کامل u_α و u_t همزمان می‌باشد. به عبارت دیگر بسامد اصلی ارتعاش در راستای محوری دو برابر بسامد ارتعاش در راستای عرضی است.

به منظور مشاهده بسامدهای بالاتر پاسخ دینامیکی، می‌توان نمودارهای آن را بزرگنمایی کرد. نمودارهای بزرگ شده در شکل ۸، شکل ۹ و شکل ۱۰ نمایش داده شده است. این شکل‌ها نشان می‌دهد که بسامدهای ارتعاشی بالاتر دامنه بسیار کمی دارند و بنابراین می‌توان بدون کاهش محسوس دقت (به ویژه در پاسخ ارتعاشات عرضی)، از آن‌ها صرف نظر نمود.

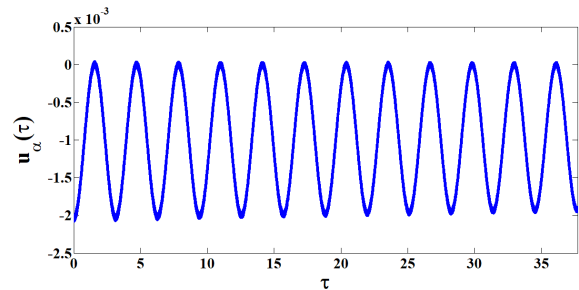


Fig. 5. Dimensionless axial response of flexure beam at $x = \alpha$

شکل ۵: پاسخ محوری بی‌بعد تیر منعطف در $x = \alpha$

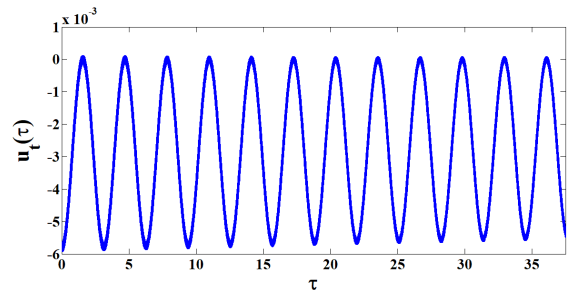


Fig. 6. Dimensionless axial response of flexure beam at $x = 1$

شکل ۶: پاسخ عرضی بی‌بعد تیر منعطف در $x = 1$

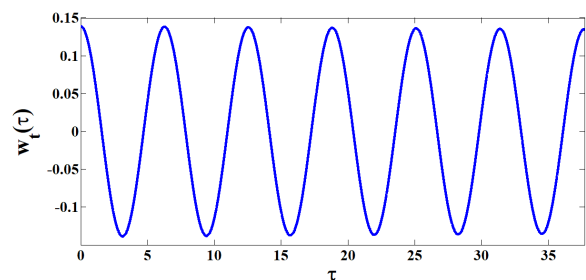


Fig. 7. Dimensionless transverse response of flexure beam at $x = 1$

شکل ۷: پاسخ عرضی بی‌بعد تیر منعطف در $x = 1$

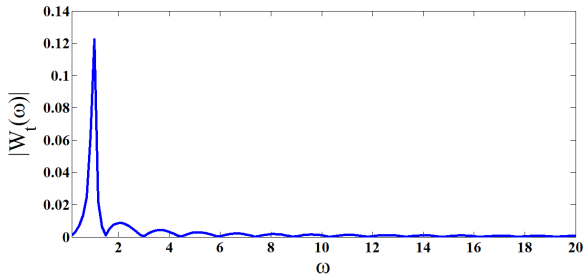


Fig. 15. Dynamic responses of DFTs of $w_i(\tau)$

شکل ۱۵: DFT های مربوط به پاسخ دینامیکی $w_i(\tau)$

صحت این ادعا، حالت همگن خطی این دو معادله دیفرانسیل به صورت زیر ارائه شده است.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u''_{\alpha}(\tau) \\ u''_t(\tau) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{12} & c_{13} \\ c_{22} & c_{21} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{\alpha}(\tau) \\ u_t(\tau) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (80)$$

که () علامت مشتق نسبت به τ است.

بسامدهای سامانه خطی در معادله (۸۰) به آسانی با حل معادله (۸۱) به دست می آید.

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + c_{12} & c_{13} \\ c_{22} & -\omega^2 + c_{21} \end{vmatrix} = 0 \quad (81)$$

بدین منظور دترمینان ماتریس ضرایب (با فرض پاسخ هارمونیک) را به دست آورده و برابر صفر قرار می دهیم. ریشه های آن همان بسامدهای طبیعی تیر منعطف می باشد.

مقادیر $\omega = 479/714$ و $\omega = 1402/68$ از حل این رابطه به دست می آید که تقریباً برابر با مقادیری است که از نمودارها به دست آمد. این نتایج نشان می دهد که می توان با دقت بسیار مناسبی بسامدهای اصلی تیر منعطف شکل ۱ را به روش تحلیلی به دست آورد؛ بنابراین برای به دست آوردن دو بسامد بالای پاسخ دینامیکی محوری نیاز به روش عددی و استفاده از نرم افزار نیست و می توان این دو بسامد را از روابط زیر به دست آورد.

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_{12} + c_{21} - \sqrt{(c_{12} - c_{21})^2 + 4c_{22}c_{13}}}{2}} \quad (82)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{c_{12} + c_{21} + \sqrt{(c_{12} - c_{21})^2 + 4c_{22}c_{13}}}{2}} \quad (83)$$

۵- نتیجه گیری

درک درست از رفتار دینامیکی غیرخطی یک سازوکار منعطف برای طراحی و بهینه سازی آن لازم و ضروری است. به هر حال اثراتی مانند هندسه غیرخطی، کشیدگی الاستیکی و شرایط مرزی پیچیده این مطالعه را پیچیده و غیربدیهی کرده است. در مقاله حاضر رفتار دینامیکی مدل غیرخطی یک تیر منعطف با بخش میانی صلب و جرم انتهایی متمرکز ارائه

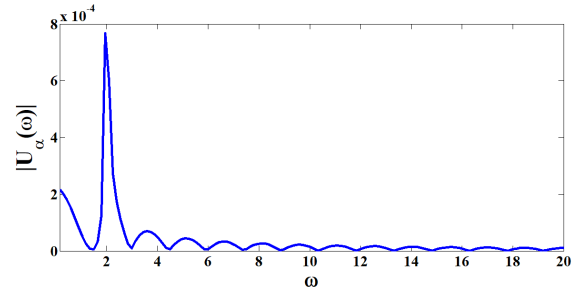


Fig. 11. Dynamic responses of DFTs of $u_{\alpha}(\tau)$ at low frequencies

شکل ۱۱: DFT های مربوط به پاسخ دینامیکی $u_{\alpha}(\tau)$ در بسامد پایین

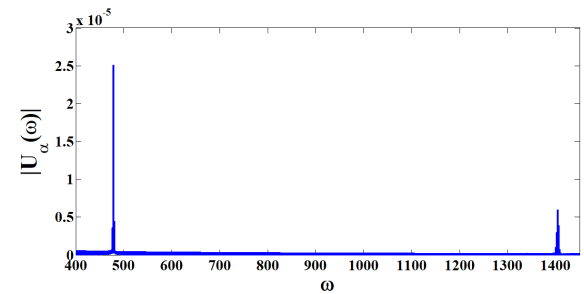


Fig. 12. Dynamic responses of DFTs of $u_{\alpha}(\tau)$ at high frequencies

شکل ۱۲: DFT های مربوط به پاسخ دینامیکی $u_{\alpha}(\tau)$ در بسامد بالا

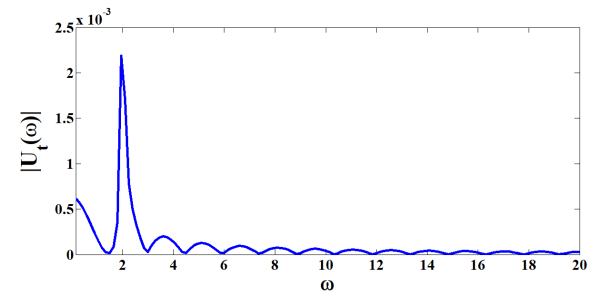


Fig. 13. Dynamic responses of DFTs of $u_t(\tau)$ at low frequencies

شکل ۱۳: DFT های مربوط به پاسخ دینامیکی $u_t(\tau)$ در بسامد پایین

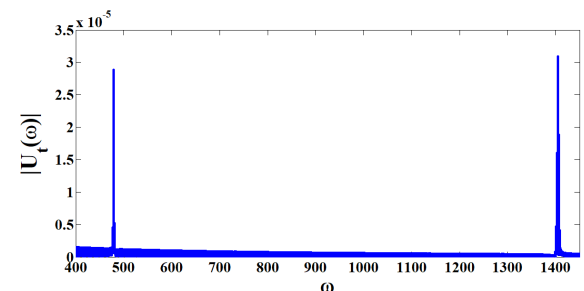


Fig. 14. Dynamic responses of DFTs of $u_t(\tau)$ at high frequencies

شکل ۱۴: DFT های مربوط به پاسخ دینامیکی $u_t(\tau)$ در بسامد بالا

طبیعی اول و دوم سامانه در راستای طولی می باشند که در راستای عرضی در راستای عرضی دامنه قابل توجهی نداشتند. حال چنانچه دو بسامد طبیعی از معادلات خطی شده روابط (۷۰) و (۷۱) به دست آید با این دو بسامد با قله بیشینه حاصل از نمودار طیف فرکانسی تقریباً برابر می باشد. برای نشان دادن

گردید. شکل مدهای دقیق با حل عددی تأیید شد. پاسخهای دینامیکی این تیر مطالعه شد و تبدیل فوریه گسسته یک طرفه این پاسخهای دینامیکی نشان داد که بسامدهای اصلی حرکت با بسامدهای طبیعی سامانه خطی که از روش تحلیلی به دست آمدند، برابر هستند. روش و رویکرد ارائه شده در این مقاله می‌تواند به خوبی برای درک شفاف و مطالعه دقیق تأثیر پارامترهای مختلف طراحی، روی کارایی دینامیکی سازوکارهای منعطف و ماژول‌های سازنده آن مورد استفاده قرار بگیرد.

پیوست

$$c_{32} = M \left(\frac{(1-2\alpha)}{2\phi(1)^2} \left(\frac{d\phi(\alpha)}{dx} \right)^2 \right)^2 \quad (92)$$

$$c_{33} = M \left(\frac{(1-2\alpha)}{2\phi(1)^2} \left(\frac{d\phi(\alpha)}{dx} \right)^2 \right) \quad (93)$$

$$c_{34} = M \left(\frac{(1-2\alpha)}{2\phi(1)^2} \left(\frac{d\phi(\alpha)}{dx} \right)^2 \right)^2 \quad (94)$$

$$c_{35} = \frac{C_t L}{\omega_n \phi^2(1)} \left(\int_0^\alpha \phi^2(x) dx + \int_{1-\alpha}^1 \phi^2(x) dx \right) \quad (95)$$

$$c_{36} = \frac{EA}{L \omega_n^2 \alpha} \left(\frac{1}{\phi^2(1)} \int_0^\alpha \left(\frac{d\phi(x)}{dx} \right)^2 dx - \left(-\frac{(1-2\alpha)}{\phi^2(1)} \times \left(\frac{d\phi(\alpha)}{dx} \right)^2 + \frac{1}{\phi^2(1)} \int_{1-\alpha}^1 \left(\frac{d\phi(x)}{dx} \right)^2 dx \right) \right) \quad (96)$$

$$c_{37} = \frac{EA}{L \omega_n^2 \alpha} \left(-\frac{(1-2\alpha)}{\phi^2(1)} \left(\frac{d\phi(\alpha)}{dx} \right)^2 + \frac{1}{\phi^2(1)} \times \int_{1-\alpha}^1 \left(\frac{d\phi(x)}{dx} \right)^2 dx \right) \quad (97)$$

$$c_{38} = \frac{EA}{2L \omega_n^2 \alpha} \left[\left(\frac{1}{\phi^2(1)} \int_0^\alpha \left(\frac{d\phi(x)}{dx} \right)^2 dx \right)^2 + \left(\frac{d\phi(\alpha)}{dx} \right)^2 \times \left(-\frac{(1-2\alpha)}{\phi^2(1)} + \frac{1}{\phi^2(1)} \int_{1-\alpha}^1 \left(\frac{d\phi(x)}{dx} \right)^2 dx \right)^2 \right] \quad (98)$$

$$c_{11} = \left(\frac{(1-2\alpha)}{2\phi(1)^2} \left(\frac{d\phi(\alpha)}{dx} \right)^2 \right) \quad (84)$$

$$c_{12} = \frac{2EA}{ML \omega_n^2 \alpha} \quad (85)$$

$$c_{13} = -\frac{EA}{ML \omega_n^2 \alpha} \quad (86)$$

$$c_{14} = \frac{EA}{ML \omega_n^2 \alpha} \left\{ \frac{(1-2\alpha)}{2\phi^2(1)} \left(\frac{d\phi(\alpha)}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2\phi^2(1)} \times \left[\int_0^\alpha \left(\frac{d\phi(x)}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2\phi^2(1)} \int_{1-\alpha}^1 \left(\frac{d\phi(x)}{dx} \right)^2 dx \right] \right\} \quad (87)$$

$$c_{21} = \frac{EA}{L \omega_n^2 M_E \alpha} \quad (88)$$

$$c_{22} = -\frac{EA}{L \omega_n^2 M_E \alpha} \quad (89)$$

$$c_{31} = \frac{L \rho A}{\phi^2(1)} \int_0^\alpha \phi(x)^2 dx + \frac{L \rho A}{\phi^2(1)} \int_{1-\alpha}^1 \phi(x)^2 dx + M \left(\frac{\phi(\alpha)}{\phi(1)} + \frac{(1-2\alpha)}{2\phi(1)} \left(\frac{d\phi(\alpha)}{dx} \right) \right)^2 + M_E + I_M \left(\frac{1}{\phi(1)} \frac{d\phi(\alpha)}{dx} \right)^2 \quad (90)$$

$$c_{23} = \frac{EA}{L \omega_n^2 M_E \alpha} \left\{ -\frac{(1-2\alpha)}{2\phi^2(1)} \left(\frac{d\phi(\alpha)}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2\phi^2(1)} \times \int_{1-\alpha}^1 \left(\frac{d\phi(x)}{dx} \right)^2 dx \right\} \quad (91)$$

منابع

- [1] S. beedy, M. Tudor and N. white, Energy Harvesting Vibration Sources for Microsystems Applications, *Measurement Science Technology*, 12)4((2006) 175-195.
- [2] M. Li, E. J. Ng, V. A. Hong, C. H. Ahn, Y. Yang, T. W. Kenny and D. A. Horsley, Single Structure 3-Axis Lorentz Force Magnetometer With Sub-30 nT/√HZ Resolution, in *IEEE*, San Francisco, 2014.
- [3] G. Dai, F. pohlenz, H.-U. Danzebrink, M. Xu, K. hasche and G. Wilkening, Metrological Large Range Scanning Probe Microscope, *Review of Scientific Instruments*, 75(3) (2004) 962-969.
- [4] P. Chatterjee and M. Bryant, Design of a Compliant Flexure Joint for Use in a Flow Energy Harvester, in

- Formulation, *International Journal of Solids and Structures*, 24(2) (1988) 1225-1234.
- [10] M. R. M. C. Da Silva, A Reduced-Order Analytical Model for the Nonlinear Dynamics of a Class of Flexible Multi-Beam Structures, *International Journal of Solids and Structures*, 35(5) (1988) 3299-3315.
- [11] H. Moeenfard and S. Awtar, Modeling Geometric Non-Linearities in the Free Vibration of a Planar Beam Flexure With a Tip Mass, *Journal of Mechanical Design*, 136(4) (2012) 208-216.
- [12] M. Olfatnia, S. Sood, Jason J. Gorman and S. Awtar,, Large Stroke Electrostatic Comb-Drive Actuators Enabled by a Novel Flexure Mechanism, *Journal of Microelectromechanical Systems*, 22(2) (2013) 112-124.
- [13] S. Awtar, A. H. Slocum and E. Sevincer, Characteristics of Beam-Based Flexure Modules, *Journal of Mechanical Design*, 129(6) (2007) 515-526.
- ASME 2014 Conference on Smart Materials*, Rhode Island, 2014.
- [5] Q. Yao, J. Dong and P. M. Ferreira, A Novel Parallel-Kinematics Mechanisms for Integrated, Multi-Axis Nanopositioning-Part 1: Kinematics and Design for Fabrication, *Precision Engineering*, 32(6) (2008) 721-732.
- [6] S. Awtar and G. parmar, Design of a Large Range XY Nanopositioning System, *Journal of Mechanism and Robotics*, 5(2) (2013) 102-112.
- [7] S. S. Rao, *Vibration of Continuous Systems*, pp 317-326, Hoboken: Wiley, 2007.
- [8] A. H. Nayfeh and D. T. Mook, *Nonlinear oscillations*, pp 39-141, New York: Wiley, 1979.
- [9] M. R. M. C. da Silva, Non-Linear Flexural-Flexural-Torsional Extensional Dynamics of Beams-I.

برای ارجاع به این مقاله از عبارت زیر استفاده کنید:

Please cite this article using:

A. Davaq, H. Moeenfard, M. Moavenian, Nonlinear Free Vibration in Flexure Beams with an Intermediate Rigid Element and a Tip Mass, *Amirkabir J. Mech. Eng.*, 50(1) (2018) 125-136.
DOI: 10.22060/mej.2017.11764.5178



